Introdução à Lógica Matemática

Ricardo Bianconi

Capítulo 1

Introdução

1.1 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é o estudo do que hoje se costuma chamar de *Lógica de Primeira Ordem* ou também de *Cálculo de Predicados*. Este assunto é uma matematização de uma parte pequena, embora substancial, do que se entende por raciocínio lógico científico (especificamente, o raciocínio matemático).

1.2 Objeto de Estudo

A Matemática é uma ciência eminentemente *dedutiva*, o que significa que todo o trabalho matemático consite em discursos que partem de premissas (ou hipóteses – declarações cujo valor verdadeiro é assumido) e seguem várias sentenças obtidas segundo algumas regras (as chamadas *regras de inferência*), até que a afirmação final resolva o problema proposto. Até a resolução de equações tem esse caráter dedutivo. Vejamos um exemplo simples.

Vamos resolver a equação linear $2x + 3 = 3x - 5$, buscando um número real que a satisfaça. Para isto, usamos as propriedades da soma e produto de números reais, que podem ser espressas como a soma e o produto são associativos comutativos (ou seja, $x+(y+z) = (x+y)+z$, $x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$, $x + y = y + x$ e $x \cdot y = y \cdot x$); o produto distribui com a soma (ou seja, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$); a existência de um elemento neutro da adição, o zero, e de opostos (ou seja, para cada número real X, exixte um número

y, tal que $x + y = 0$ e denotamos tal y por $-x$). O objetivo da solução da equação é *isolar* a *variável* x de um dos lados da igualdade, deixando apenas números do outro lado, nos seguintes passos:

1. $4x + 3 = 3x - 5$ (a equação a ser resolvida);
2. $(-3x) + (4x + 3) = (-3x) + (3x - 5)$ (propriedade da igualdade);
3. $(-3x + 4x) + 3 = (-3x + 3x) - 5$ (associatividade da adição);
4. $x + 3 = -5$ (resultado das operações entre parênteses);
5. $(x + 3) + (-3) = -5 - 3$ (novamente uma propriedade da igualdade);
6. $x + (3 - 3) = -8$ (associatividade da soma);
7. $x = -8$ (resultado da operação entre parênteses e o resultado final da solução pretendida).

Essa solução é uma sequência de afirmações (as várias equações intermediárias), cada uma das uqais obtidas de anteriores e de propriedades da soma e da igualdade (que também são afirmações, que podem ser consideradas como presentes na solução).

Esta disciplina tem por objetivo estudar uma parte pequena, mas extremamente relevante desse processo dedutivo. Mais especificamente, desenvolveremos o estudo do que se chama o Cálculo de Predicados de Primeira Ordem[1], culminando com os trabalhos de Kurt Gödel (1930 e 1931), em que prova que tal cálculo é completo em si mesmo (dentro de um sistema dedutivo mais abrangente – ou seja, basta usarmos as propriedades de primeira ordem para deduzir todas as propriedades de primeira ordem – coisa que o sistema maior não tem), e que, se levarmos em conta o aspecto *computacional* das deduções, então as teorias de primeira ordem que contenham alguma aritmética[2] são incompletas (quando confrontadas com o sistema maior).

O método de estudo da lógica matemática é criar um modelo matemático que reflete com precisão e fidelidade boa parte do raciocínio (ou argumentação) matemático.

---

[1] O significado dessa expressão será explicado no momento oportuno.

[2] Isto também será explicado em detalhes mais adiante.

1.3 Plano da Obra

Este trabalho serve como referência para a disciplina MAT-359, Lógica, lecionada no IME-USP para o Bacharelado em Matemática.

Além deste capítulo introdutório, segue o segundo capítulo em que comentamos a bilbiografia consultada e indicamos outras obras para complementação do estudo para aqueles que quiserem ir além do conteúdo desta disciplina.

Como os resultados a serem provados têm um aspecto combinatório aparentemente complicado e notacionalmente pesado, no Capítulo 3 apresentamos um esboço histórico bastante parcial do desenvolvimento dessa parte da lógica, dando ênfase ao trabalho de Aristóteles, como um exercício prévio, passando pelos estóicos, os trabalhos iniciados por George Boole, Gottlob Frege, David Hilbert, no século XIX e início do XX, motivando o estudo que se segue. O Capítulo 4 trata do fragmento proposicional do Cálculo de Predicados, o qual será introduzido no Capítulo 5, que conterá até a prova de que o sistema é completo. O Capítulo 5 trata da *incompletude* do sistema, quando se leva em conta o aspecto computacional.

Os exercícios fazem parte do texto. Em geral servem ao duplo propósito de treinar alunas e alunos em dedução formal e deixar os argumentos tediosos mas diretos aos coitados supracitados.

Capítulo 2

Bibliografia Comentada

Listamos aqui todas as obras consultadas e também alguns livros sobre o assunto para quem quiser se aprofundar em algum assunto ou pegar outra referência além dessas notas.

Para quem quiser começar a estudar o lado filosófico da Lógica, sugerimos consultar a *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, referência [1], disponível na Internet. Ainda não está completa, mas tem muitos verbetes com estudos extensos sobre os vários tópicos. Veja também nas referências abaixo relacionadas alguns dos verbetes consultados.

Um livro difícil, mas muito bom, que trata de toda a matéria dessa disciplina é o de J. R. Shoenfield, *Mathematical Logic*, referência [12].

Outro que dá bastante ênfase aos fundamentos, com o foco na computabilidade da lógica é a referência [6].

Outros livros mais introdutórios (que não tratam da Incompletude, ou fazem de modo não muito completo, são as referências [7, 10].

Um estudo aprofundado sobre Aristóteles é o de Oswaldo Porchat Pereira, *Ciência e Dialética em Aristóteles*, referência [11].

Um texto de lógica voltado para a Computação é a referência [13].

Referências Bibliográficas

[1] *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Principal Editor: Edward N. Zalta. Disponível em http://plato.stanford.edu. Acessos em julho e agosto de 2009.

[2] Dirk Baltzly. *Stoicism*. Em Stanford Encyclopedia of Philosophy (ver acima).

[3] Susanne Bobzien. *Ancient Logic*. Em Stanford Encyclopedia of Philosophy (ver acima).

[4] Stanley Burris. *The Algebra of Logic Tradition*. Em Stanford Encyclopedia of Philosophy (ver acima).

[5] Silvia Carnero. *El Silogismo: Historia e Desarrollo*. Disponível em http://serbal.pntic.mec.es/∼/cmunoz11

[6] W. Carnielli, R. Epstein. *Computabilidade, funções computáveis, lógica e os fundamentos da matemática*. Editora da UNESP, São Paulo, SP, 2005

[7] H. B. Enderton. *A Mathematical Introduction to Logic*. Academic Press, Nova Iorque, 1972.

[8] W. C. Guthrie. *Os Sofistas*.

[9] Henrik Lagerlund. *Medieval Theories of Syllogism.*

[10] E. Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic*. Van Nostrand, Princeton, N.J., 1964.

[11] Oswaldo Porchat Pereira. *Ciência e Dialética em Aristóteles.* Editora da Unesp, São Paulo, 2001.

[12] J. R. Shoenfield. *Mathematical Logic* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1967.

[13] Flávio Soares Corrêa da Silva, Marcelo Finger, Ana Cristina Vieira de Melo. *Lógica para a Computação.* Thomson Learning, São Paulo, SP, 2006.

[14] Robin Smith. *Aristotle's Logic*. Em Stanford Encyclopedia of Philosophy (ver acima).

[15] Richard Zach. *Hilbert's Program.* Em Stanford Encyclopedia of Philosophy (ver acima).

[16] Edward N. Zalta. *Gottlob Frege.* Em Stanford Encyclopedia of Philosophy (ver acima).

Capítulo 3

Breve Histórico

Neste capítulo abordaremos sumariamente a evolução histórica da lógica matemática, sem a pretensão de sermos completos. Na verdade, veremos apenas os ramos que nos interessam para motivar o que vem a seguir, deixando àqueles que se interessarem a leitura das obras referidas na bibliografia.

3.1 Lógica na Antiguidade

3.1.1 Os Primórdios da Lógica Grega Antiga

Aristóteles foi o primeiro filósofo grego a escrever de forma sistemática sobre lógica, como ferramenta (ou conjunto de regras) para disciplinar a argumentação científica. No entanto, antes dele (séculos V e IV A.C.), alguns filósofos e sofistas[1] já se ocupavam do problema da argumentação, linguagem (estrutura das sentenças), verdade, falácias, entendimento e convicção.

Os sofistas dedicavam-se à argumentação política e jurídica: ou seja, convencer os outros. Para eles, *verdade* seria aquilo que pudessem fazer seu interlocutor crer que fosse tal. Por exemplo, o famoso sofista Protágoras (485-415 A.C.) estudava a estrutura das sentenças, classificando-as como expressando

[1] A palavra *sofista* designa genericamente escolas de pensamento que se preocupavam com a argumentação política e jurídica, tendo o homem e não ideias abstratas como ponto de referência. Foram criticados pelos filósofos idealistas, que criaram o uso pejorativo da palavra sofista e sofisma. Para um estudo mais sério sobre estes pensadores, recomendamos a obra *Os Sofistas* de W. C. Guthrie, [8].

desejo (*gostaria que ...*), questão, resposta e comando (modo imperativo); Alcidamas (discípulo de outro sofista famoso, Górgias, e que floresceu em meados do século IV A.C.) classificava-as como afirmação, negação, questão e discurso; Antístenes (meados dos séculos V e IV A.C.) definia sentença como sendo aquilo que indique o que uma coisa foi ou é, de modo que aquele que dissesse a coisa que é, falaria a verdade.

O tartado de lógica mais antigo de que se tem notícia é o *Dissoi Logoi* – ou seja, *Duplos Argumentos* – publicado em cerca de 400 A.C., debatendo sobre verdade e falsidade, opondo duas teorias da verdade:

1. a verdade seria uma propriedade temporal de sentenças – uma senteną seria verdadeira se no momento que fosse proferida, ocorresse aquilo a que se refere (por exemplo, a frase *chove agora* seria considerada verdadeira se no momento em que fosase proferida estivesse chovendo, e falsa, caso contrário);

2. a verdade seria uma propriedade atemporal de sentenças – uma sentença seria considerada verdadeira se fosse o caso de que se conformasse com o que existisse.

Esse tratado também se refere ao problema de que um uso auto-referente do predicado verdade traria problemas (antecipando o famoso *paradoxo do mentiroso* descoberto por Eubúlides de Mileto em meados do século IV A.C. – uma pessoa diz *estou mentindo*; esta frase é verdadeira ou falsa?).

Platão separou a sintaxe (a sentença) e a semântica (o fato de ser verdadeira ou falsa) (veja seu diálogo *O Sofista*), mas não fez nenhum estudo sistemático da lógica.

3.1.2 Os Silogismos Aristotélicos

Aristóteles escreveu (pelo menos) seis livros tratando especificamente de lógica, agrupados posteriormente com o nome de *Órganon* (ferramenta). Ao analisar os argumentos matemáticos, ele pôde definir as regras básicas de argumentação lógica – os *silogismos*, ou deduções. As sentenças consideradas por Aristóteles eram da forma *Sujeito-Predicado* ligados pelo verbo *ser* conjugado conforme o caso. Tanto o sujeito quanto o predicado da sentença eram chamados de *termos*. Estes podem ser *termos universais* se forem da forma *todo X*, ou *termos particulares*, ou *indefinidos* se apenas contiver palavras ou expressões sem uma ideia de quantidade (todo ou algum). Podem haver também os *termos singulares*, aqueles que nomeiam alguma coisa ou ser específico (por exemplo, o nome de uma pessoa) – estes são tratados por Aristóteles como se fossem universais (por exemplo *Sócrates* – o nome do filósofo – era tratado também como se fosse *todo Sócrates*). Confrome seja o termo que é o sujeito da sentença, esta pode ser chamada de *universal*,, ou *particular* ou *indefinida*.

Ele definiu uma *dedução* como sendo *um discurso em que, sendo supostas certas coisas, algo diferente do que foi suposto resulta necessariamente por assim ser*[2].

Bom, essa definição não ajuda muito entender o que ele pretendia, mas uma descrição explícita de seu sistema vem a calhar.

Um silogismo é uma regra de extrair uma conclusão *necessária* a partir de duas premissas (ou seja, se for negada a conclusão, as premissas não poderão ambas serem aceitas). Os silogismos são construídos com sentenças de um dos tipos:

1. todo X é Y;
2. algum X é Y;
3. todo X é não Y (ou nenhum X é Y);
4. algum X é não Y (ou nem todo X é Y).

Os dois primeiros tipos de sentenças são afirmativas e as duas últimas negativas. A sentença "*algum X é não Y*"é a negação de "*todo X é Y*"e a sentença "*nenhum X é Y*"é a negação de "*algum X é Y*".

Durante a Idade Média (não se sabe quando) surgiram palavras mnemônicas para a memorização das várias figuras dos modods de silogismos. Usaram as duas primeiras vogais da palavra latina *affirmo*, A e I, e as duas vogais da palavra *nego*, E e O, para indicar cada um dos tipos de sentenças que podem compor um silogismo:

1. (A): todo X é Y;
2. (I) algum X é Y;

[2]Ser necessário! Ou seja,se as coisas supostas forem verdadeiras, a conclusão tem que ser verdadeira.

3. (E) todo X é não Y (ou nenhum X é Y);

4. (O) algum X é não Y (ou nem todo X é Y).

O silogismo envolverá sempre três termos nas três sentenças que o compœ, sendo que um termo será comum nas duas premissas (o chamado termo médio) e a conclusão envolverá os termos restantes: como exemplo, o primeiro silogismo:

> **Premissa:** Todos os homens são animais.
> **Premissa:** Todos os animais são mortais.
> **Conclusão:** todos os homens são mortais.

Pensando nas classes (ou coleções) de homens, animais e mortais, temos que necessariamente os homens formam uma subclasse dos animais, que, por sua vez, formam uma subclasse dos mortais. A *premissa maior* é a sentença que contém como predicado (isto é, o que vem depois do verbo *ser*) o que virá a ser o predicado da conclusão. A outra premissa é chamada de *premissa menor*. O predicado da premissa menor é osujeito da premissa maior e não faz parte da conclusão. Este predicado é o chamado *termo médio* do silogismo.

O silogismo apresentado acima é da forma AAA, ou seja, as três sentenças que o compõem são da forma *todo X é Y*. O nome medieval deste tipo de silogismo é *BARBARA*.

Aristóteles obteve três figuras (ou tipos de estruturas) de silogismos, e para não ocupar muito espaço em sua exposição (e para melhor visualização) vamos introduzir um pouco de notação, usando as letras A, E I e O, como explicadas acima, definindo:

1. $A(X, Y)$: todo X é Y;

2. $I(X, Y)$ algum X é Y;

3. $E(X, Y)$ todo X é não Y (ou nenhum X é Y);

4. $O(X, Y)$ algum X é não Y (ou nem todo X é Y).

Assim, o silogismo BARBARA pode ser escrito como $A(X, Y), A(Y, Z) \vdash A(X, Z)$ (aqui já usaremos o símbolo $\vdash$ para indicar a relação que diz ser o lado direito dele conclusão do que vem de seu lado esquerdo).

A **Primeira Figura** caracteriza-se pela forma genérica dos predicados: $*(Y,Z), *(X,Y) \to *(X,Z)$ (ou seja, o termo médio Y é o sujeito da premissa maior $*(Y,Z)$ e predicado da menor $*(X,Y)$), sendo que o asterisco representa uma das vogais A, E, I ou O. Essa figura é composta pelas quatro regras (ou *modos*) seguintes:

1. BARBARA $A(Y,Z), A(X,Y) \vdash A(X,Z)$
2. CELARENT $E(Y,Z), A(X,Y) \vdash E(X,Z)$
3. DARII $A(Y,Z), I(X,Y) \vdash I(X,Z)$
4. FERIO $E(Y,Z), I(X,Y) \vdash O(X,Z)$

Exercício 1 Mostre que somente essas possibilidades são válidas (tente outras permutações das vogais e verifique, dando um exemplo, que não podem ser válidas).

A **Segunda Figura** caracteriza-se pelo esquema $*(X,Z), *(Y,Z) \to *(X,Y)$ (isto é, o termo médio Z é o predicado das duas premissas) e tem quatro modos:

1. CESARE $E(X,Z), A(Y,Z) \vdash E(X,Y)$
2. CAMESTRES $A(X,Z), E(Z,X) \vdash E(X,Y)$
3. FESTINO $E(X,Z), I(Y,Z) \vdash O(X,Y)$
4. BAROCO $A(X,Z), O(Y,Z) \vdash O(X,Y)$

A **Terceira Figura** caracteriza-se pelo esquema $*(X,Y), *(X,Z) \to *(Z,Y)$ (o termo médio X é o sujeito das duas premissas) e possui seis modos:

1. DARAPTI $A(X,Y), A(X,Z) \vdash I(Z,Y)$
2. FELAPTON $E(X,Y), A(X,Z) \vdash O(Z,Y)$
3. DISAMIS $I(X,Y), A(X,Z) \vdash I(Z,Y)$
4. DATISI $A(X,Y), I(X,Z) \vdash I(Z,Y)$

5. Bocardo $O(X,Y), A(X,Z) \vdash O(Z,Y)$

6. Ferison $E(X,Y), I(X,Z) \vdash O(Z,Y)$

Um discípulo de Aristóteles, Teofrasto, isolou uma **Quarta Figura**, caracterizada por $*(X,Y), *(Y,Z) \rightarrow *(Z,X)$ (o termo médio Y é o sujeito da premissa menor e predicado da maior), com cinco modos:

1. Bramantip (ou Bamalip) $A(X,Y), A(Y,Z) \vdash I(Z,X)$

2. Camenes $A(X,Y), E(Y,Z) \vdash E(Z,X)$

3. Dimaris $I(X,Y), A(Y,Z) \vdash I(Z,X)$

4. Fesapo $E(X,Y), A(Y,Z) \vdash O(Z,X)$

5. Fresison $E(X,Y), I(Y,Z) \vdash O(Z,X)$

Exercício 2 Descreva como são e verifique a validade dos seguintes *modos subalternos*: Barbari, Celaront, Cesaro, Camestrop e Camenop, que se caracterizam por conclusoes particulares tiradas a partir de premissas universais. De quais modos foram obtidos?

Exercício 3 Do ponto de vista moderno, os modos Bramantip e barbari são problemáticos. Explique porque. Aqui Aristóteles assume implicitamente alguma coisa que faz com que estes silogismos sejam válidos.

Agora exporemos os **Métodos de Prova** Aristotélicos. Como ele definiu uma demonstração (ou prova) como sendo um discurso *etc*, será então uma sequência de sentenças ordenadas segundo certos princípios e regras.

Uma demonstração pode ser *direta*, em que o discurso é composto por uma sequência de sentenças obtidas por silogismos ou regras de conversão (veja mais adiante) ou por redução ao absurdo.

O primeiro importante princípio é o **Princípio da Não Contradição**, estatuindo que não se pode afirmar e negar uma sentença ao mesmo tempo (ou seja, não pode uma sentença e sua negação serem ambas verdadeiras).

O segundo é o **Princípio do Terceiro Excluído**[3], ou seja, entre uma sentença e sua negação, exatamente uma delas será verdadeira.

Este princípio materializa-se nas **Demonstrações por Redução ao Absurdo**, em que, assumindo a negação do que se quer demonstrar e concluindo uma contradição (ou seja, existe uma sentença e também sua negação no discurso demonstrativo), pode-se concluir que o que se queria estará demonstrado.

A *Demonstração Direta* é o discurso partindo de premissas, *usando os silogismos da primeira figura* ou[4]

Regras de Conversão:

1. $E(X,Y) \vdash E(Y,X)$ (*nenhum X é Y* converte-se em *nenhum Y é X*);

2. $I(X,Y) \vdash I(Y,X)$ (*algum X é Y* converte-se em *algum Y é X*);

3. $A(X,Y) \vdash I(X,Y)$ (*todo X é Y* converte-se em *algum X é Y* – hoje em dia essa regra não é considerada válida – mas para os gragos antigos não fazia sentido falar em *conjunto vazio* e, portanto, uma frase do tipo *todo venusiano é verde* seria considerada falsa por não existirem venusianos[5]

Observemos que numa demonstração por redução ao absurdo também podem ser usadas estas regras e os silogismos da primeira figura.

Por fim, para **refutar** uma sentença, pode ser adimtido um (contra)exemplo.

Façamos dois exemplos de deduções neste sistema:

Exemplo 1 Vamos demonstrar o modo CESARE da segunda figura, ou seja, $E(X,Z), A(Y,Z) \vdash E(X,Y)$[6]

[3]Hoje em dia, principalmente com o advento da *Lógica Intuicionista*, há uma diferença importante entre o princípio da não contradição e o do terceiro excluído. Veja o Capítulo 4 sobre o Cálculo Proposicional em que daremos algumas noções da lógica intuicionista e a diferença entre esses dois institutos.

[4]Para nós, a menos de menção contrária, a palavra OU é inclusiva – falar A OU B significa pelo menos uma das sentenças entre as referidas – é o famoso E/OU usado em alguns textos. Veja mais sobre isto na próxima seção sobre a Lógica Estóica.

[5]Se porventura você acredita na existência de venusianos, substitua o termo por qualquer outro que você acredite não existir.

[6]Para os terráqueos, premissas: *nenhum X é Z, todo Y é Z*; conclusão: *nenhum X é Y*.

1. $E(X, Y)$ - premissa;
2. $A(Y, Z)$ – premissa;
3. $E(Z, X)$ – conversão de 1;
4. $E(X, Y)$ – conclusão de CELARENT, tendo como premissas 3 e 2 (nesta ordem).

Exemplo 2 Vamos agora usar o método da redução ao absurdo para provar BAROCO, ou seja, $A(X, Z), O(Y, Z) \vdash O(X, Y)$[7] Para isto, assumiremos que não valha a regra (ou seja, assumiremos as premissas e negaremos a conclusão[8]), obtendo uma contradição:

1. $A(X, Z)$ – premissa;
2. $O(Y, Z)$ – premissa;
3. $A(X, Y)$ – premissa (hipótese para a redução ao absurdo);
4. $A(Y, X)$ – conversão de 3;
5. $A(Y, Z)$ – BARBARA com premissas 4 e 3;
6. $O(X, Y)$ – conclusão devido à contradição entre 2 e 5.

Exercício 4 Mostre que cada um dos modos das figuras 2, 3 e 4 podem ser deduzidos neste sistema. [Sugestão: a consoante que inicia o nome de cada um desses modos coincide com aquele da primeira figura que será usado nma demonstração. O único modo que requer demonstração por redução ao absurdo é BOCARDO.]

Exercício 5 Mostre que os modos DARII e FERIO podem ser deduzidos no sistema em que só se usam os dois primeiros modos da primeira figura. [Sugestões: por redução ao absurdo usando CAMESTRES para DARII e CESARE para FERIO, e depois elimine essas figuras usando o exercício anterior.]

Muita coisa sobre a lógica de Aristóteles foi omitida deste texto. Recomendamos a leitura de [14].

---

[7] Para nós, pobres mortais, premissas: *todo X é Z, nenhum Y é Z*; conclusão: *nenhum X é Y.*

[8] Por que isto significa negar a regra?

3.1.3 A Lógica dos Estóicos

Dos estóicos falaremos pouco (veja [2] para mais detalhes). O que mais nos interessa de sua lógica é que trataram com profundidade o que hoje chamamos de Cálculo Proposicional, assunto de nosso próximo Capítulo[9]. Essencialmente estudaram a implicação (*se A então B*, que resumiremos com a notação $A \to B$) chegando às seguintes regras de dedução contendo duas premissas e uma conclusão:

1. $A \to B$; $A \vdash B$ (*Modus Ponens*)
2. $A \to B$; não $B \vdash$ não A (*Modus Tollens*)
3. se não for o caso de valer ambas A e B, mas valer $A \vdash$ não B
4. ou A ou B; $A \vdash$ não B (aqui eles entendem a palavra *ou* como sendo exclusivo – apenas uma das sentenças entre A e B pode ser verdadeira para que a disjunção[10] que compœ a primeira premissa seja verdadeira)
5. ou A ou B; não $A \vdash B$ (novamente disjunção exclusiva).

3.2 O Enfoque Moderno da Lógica

Vamos deixar a Antiguidade e pular para os séculos XIX e XX.

3.2.1 Boole e a Algebrização da Lógica

George Boole foi o primeiro que apresentou a Lógica como uma teoria matemática, dando um enfoque algébrico a ela – uma álgebra de conjuntos. Definiu abstratamente um sistema algébrico para formalizar os silogismos, como por exemplo, a sentença *todo X é Y* é representada pela relação $X \cdot Y = Y$, sendo que $\cdot$ seria uma operação binária (que para conjuntos corresponderia à intersecção) – hoje ela representa o conectivo E – assim, a representação algébrica do silogismo BARBARA ficaria $Y \cdot Z = Y$; $X \cdot Y = X \vdash X \cdot Z = X$. Falaremos mais sobre essas álgebras (chamadas de álgebras de Boole, ou booleanas) no capítulo sobre o Cálculo Proposicional.

[9] Não perca!

[10] Sentenças do tipo *A ou B*, *ou A ou B*, são ditas disjunções.

O importante aqui é ressaltar a construção de objetos matemáticos que intepretam[11] fielmente (parte do) raciocínio lógico usado em matemática.

3.2.2 Leibniz e a —Lingua Characteristica – Frege e a Necessidade da Formalização

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) publicou em 1666 a obra *Dissertatio de arte combinatoria* na qual esboçou um plano para o que chamava de *Característica Universal*, uma linguagem artificial prórpia para expressar os conceitos da lógica e filosofia. Esboçou também um cálculo lógico, cuja intenção era mecanizar as deduções (inferências) válidas e também verificar as deduções feitas por outros. Essas ideias influenciaram Charles Babbage, William Stanley Jevons, Charles Sanders Peirce e outros, os quais produziram trabalhos voltados para essa mecanização, culminando com o desenvolvimento dos computadores.

Uma influência assumida foi declarada por Gottlob Frege (1848-1925), que desenvolveu uma linguagem artificial para o estudo das deduções lógicas e expressões de conceitos, como tentativa de fundamentar a Matemática.

Desenvolveu seu sistema notacional primeiramente na obra *Begriffsschrift* (1879) (*Conceitografia*). A notação[12] que introduziu are gráfica, diagramática. Estava preocupado com a estrutura das inferências, e não tanto com o *conteúdo* do que era demonstrado. Assim, nessa obra, não especificou toda a linguagem, mas apenas aquela parte que poderíamos chamar de lógica.

Uma *proposição* (ou *julgamento*) era denotada por

$$\vdash A$$

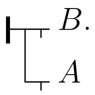
sendo que A denota o conteúdo da asserção. Se apenas quiser referir-se ao conteúdo, sem que se afirma ser uma proposição, usa apenas uma barra horizontal antes do conteúdo: $-A$. No entanto, não é qualquer conteúdo A que se torna uma proposição escrevendo o símbolo $\vdash A$ (por exemplo, o conteúdo A expressando o conceito *casa*). A *implicação* "*se A. então B*"era denotada por

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top B \\ \quad \llcorner A \end{array}$$

[11] Ou *refletem*, como num espelho.

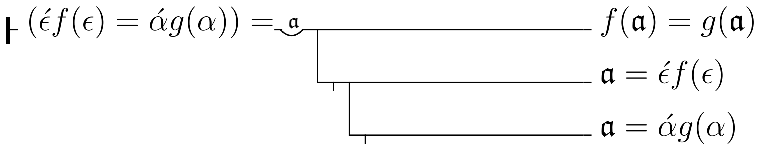
[12] Foi possível escrevermos esta notação graças ao pacote *begriff.sty*, desenvolvido por by Josh Parsons – josh@coombs.anu.edu.au – que detém os direitos autorais do pacote.

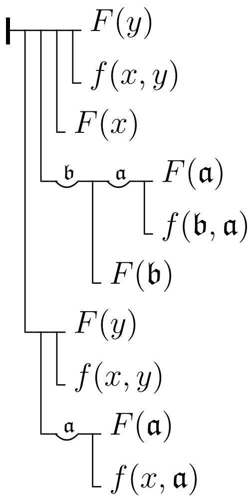
e a negação "*não A*" por $\vdash\!\!\!\top\, A$. Combinando com a implicação, teríamos, por exemplo, "*se não A, então não B*", dado por



Um conteúdo pode ter alguma elemento indeterminado, que pode ser substituído por outros conteúdos – ou seja, uma variável. Podemos considerar tais conteúdos como *funções*: $\vdash \Phi(A)$ seria a proposição que "*A tem a propriedade* Φ"; $BGassert\Psi(A, B)$ seria a proposição "*A e B são relacionados por* Ψ". Com isto, temos a possibilidade da *quantificação* (universal), sendo que a proposição "*para todo* $\mathfrak{a}$, $\Phi(\mathfrak{a})$"tomaria a forma $\vdash\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\, \Phi(\mathfrak{a})$.

Frege também considerou a possibilidade da letra Φ em $\Phi(A)$ ser considerada uma variável (proposicional), que poderia também ser quantificada: $\vdash\!\smile^{\mathfrak{f}}\!\!-\, \mathfrak{f}(\mathfrak{a})$. Esta liberalidade, junto com a noção de extensão (discutida a seguir) é que permitiu a possibilidade do chamado paradoxo de Russel. Vejamos como isso ocorreu.





3.2.3 Russel: o Paradoxo e a Teoria dos Tipos

A ideia que faria o trabalho de Frege desmoronar era uma regra que permitia dar nome a uma classe de conceitos e tratá-la como novo conceito (essa era a *Regra 5* de seu sistema, como exposto no seu livro *Grundgesetze der Arithmetik*, Vol. 1, de 1893).

Em uma carta datada de 16 de junho de 1902, Bertram Russell apontou o problema que esta regra trazia ao sistema.

Para entendermos a argumentação de Russell, ele usava a palavra *predicado* para designar um conceito. Pela regra 5 de Frege, um predicado P consistia na classe de todos os conceitos predicados por P. Assim P predicar Q seria equivalente a Q ser elemento da classe P.

Sua argumentação é simples: considere a classe dos predicados que não predicam a si mesmos (ou conceitos que não conceituam a si mesmos). Dê-se a essa classe o nome W. Então um predicado P pertence a essa classe se, e somente se, P não predica P. Pergunta-se: W predica a si mesmo? Bom, se W predica a si mesmo, então W é elemento de W. Mas para ser elemento de W deve satisfazer o conceito de não predicar a si mesmo (o que define a classe W). Assim, a hipótese de que W predica a si mesmo, concluímos que W não pode predicar a si mesmo, uma contradição. Bom, então supomos que W não predique a si mesmo (ou W não seja elemento de W). Daí, concluímos que W satisfaz ao conceito definidor da classe W e, portanto, é elemento de si mesmo, novamente uma contradição. Assim, o sistema de Frege permite deduzir a afirmação contraditória de que "*existe um conceito W, tal que W predica a si mesmo se, e somente se, W não predica a si mesmo*".

Observe a possibilidade de um conceito referir a si mesmo nesse sistema. Para evitar esse tipo de contradição, Russell propôs um sistema em que os conceitos fossem divididos em níveis ordenados, de modo que um conceito não possa referir a nenhum outro conceito que não fosse de um nível inferior, criando a chamada Teoria de Tipos.

O nível zero dessa teoria é o que chamamos de *Cálculo Proposicional*.

Capítulo 4

Dedução Informal

Antes de embarcarmos em um estudo da lógica formal, ou seja, daquela para a qual introduziremos uma nova linguagem artificial e mecanizada, vamos discutir brevemente alguns dos princípios e métodos de dedução matemática que serão usados neste texto.

A análise que faremos do Cálculo de Predicados (e seu fragmento proposicional) será levada a cabo em nossa língua, o Português. Os argumentos feitos nessa linguagem serão chamados de *metamatemácos* e os feitos nas linguagens formais (artificiais), a serem introduzidas mais adiante, seráo chamados de *matemáticos*. Esta designação, herança dos linguistas, só serve para distinguir as proposições dos sistemas formais daquelas acerca de tais sistemas. Não tentaremos formalizar a linguagem metamatemática, pois seu estudo é bem mais complicado do que os sistemas formais a serem estudados aqui.

4.1 Valores de Verdade – A Lógica *Clássica*

Hoje em dia não se pode falar de uma lógica, no singular, para indicar um sistema de princípios e métodos de dedução. Por isso, chamamos a lógica estudada neste texto de *Lógica Clássica* para diferenciá-la das diversas lógicas presentes atualmente. Ela baseia-se em dois princípios fundamentais, já apresentados ao falarmos de Aristóteles:

> **Princípio da Não Contradição:** Uma sentença não pode ser ao mesmo tempo verdadeira e falsa.

Nem a todas as sentenças podemos atribuir um valor de verdade que faça sentido, pelo menos em matemática. Por exemplo, uma pergunta, uma interjeição, uma ordem. Apenas[1] àquelas sentenças que declaram alguma propriedade acerca de algum objeto faz sentido essa atribuição de valor. Tais sentenças serão chamadas de *proposições*. Para estas, o segundo princípio, que realmente caracteriza fortemente a lógica clássica, limita as possibilidades de velores de verdade.

> **Princípio do Terceiro Excluído:** Uma proposição pode ser somente verdadeira ou falsa. Não há outras possibilidades.

Com isto, separamos o conjunto de proposições em dois conjuntos disjuntos: as verdadeiras e as falsas.

A negação: Essa distribuição de proposições em verdadeiras ou falsas deve satisfazer alguns critérios. O primeiro refere-se à negação. Se uma proposição for verdadeira, sua negação será falsa e se aquela for falsa, sua negação será verdadeira. No entanto, vela mais do que isto: se a negação de uma proposição for verdadeira, então ela será falsa e se sua negação for falsa, então ela será verdadeira. Esta última afirmação distingue a lógica clássica da intuicionista (mais construtiva) e é a base das demonstrações por redução ao absurdo.

Deduções: uma dedução (ou também, demonstração) informal é um discurso realizado na língua portuguesa, eventualmente envolvendo alguns símbolos matemáticos, em que, partindo de certas proposições chamadas de *premissas* ou *hipóteses*, chegando, ao final a uma proposição que será a conclusão da argumentação, satisfazendo a condição de que ela seja verdadeira, se todas as premissas também o forem.

Argumentos Válidos: serão considerados válidos os argumentos (deduções) que tenham uma conclusão considerada verdadeira, mas também aquelas cuja conclusão seja falsa, quando alguma das premissas for falsa.

A implicação: uma implicação é uma proposição da forma *se A, então B*, sendo que A é uma premissa ou hipótese (que pode ser uma proposição bem complexa) e B é uma proposição, a sua conclusão ou tese. A ideia é que uma implicação contenha em si a informação de que das premissas possamos concluir a tese. Assim, se a hipótese for verdadeira, a tese terá que

[1] Existem lógicas, consideradas não clássicas, que estudam tais sentenças. Não serão tratadas aqui.

necessariamente ser verdadeira. Demonstrar uma implicação diretamente significa afirmar as premissas e chegar à conclusão. Podemos demonstrá-la também de duas maneiras indiretas:

1. **Contrapositiva:** nega-se a tese, isto é, assumimos que a tese é falsa, e concluímos que a premissa também será falsa, ou seja, concluímos a negação da premissa;

2. **Redução ao Absurdo:** neste caso negamos que a implicação seja verdadeira (isto ocorre se afirmamos a premissa e, ao mesmo tempo, negamos a tese) e concluímos uma contradição (ou seja, no discurso demonstrativo haverá duas proposições contraditórias – uma a negação da outra) – como estamos assumindo que a argumentação é válida, devemos concluir que a hipótese da negação da implicação será falsa e, portanto, que a implicação será verdadeira.

Muitos textos confundem estas duas formas indiretas de demonstração. Elas só divergem em lógicas não clássicas, como veremos mais adiante.

Exercício 6 A implicação pode ser escrita de diversas maneiras distintas em português. Nas frases abaixo, indique o que é premissa e o que é conclusão da implicação:

1. se A, então B;

2. A implica B;

3. B, sempre que A (sempre que A ocorre, então B também deve ocorrer);

4. B, se A;

5. A, somente se B (se B não ocorre, então A não pode ocorrer);

6. A e, portanto, B;

7. A é condição suficiente para B (supondo a implicação verdadeira, basta que A seja verdadeira para que possamos concluir que B é verdadeira);

8. B é condição necessária para A (supondo a implicação verdadeira, se B for verdadeira, A tem que necessariamente ser verdadeira).

Variáveis: para indicar um elemento indeterminado (de alguma classe) usamos uma letra ou símbolo, que chamamos de veriável (como uma variável ou incógnita de uma equação). Assim, frases do tipo *seja*[2] *P uma proposição* contém a letra P indicando uma proposição qualquer – essa letra pode ser substituída por uma proposição específica.

Generalização de variáveis: em uma demonstração de uma proposição do tipo "*toda P, sentença,* $\Phi(P)$[3]"em geral lançamos como uma premissa a frase "*seja P uma sentença*"e continuamos a argumentação até chegarmos à afirmação $\Phi(P)$. Depois argumentamos que *como P é genérico, a sentença* $\Phi(p)$ *vale para todo P.* Isto significa que não apareceu no texto da argumentação nenhuma premissa e nem proposição que particularizasse a classe de variação da variável P e, portanto, permitimo-nos concluir que a afirmação $\Phi(P)$ valha para todo P. Este é o chamado princípio ou regra da generalização.

4.2 Recursão e Indução Finita

Um tipo recorrente de definição neste texto serão as definições em que são feitas construções por recursão, o que significa que partimos de uma classe de elementos iniciais e agregamos símbolos, ou fazemos alguma conta, sobre o resultado anterior. Toma a seguinte forma:

> **Passo Inicial:** uma definição qualquer.
> **Passo recursivo:** assumimos ter construído o objeto e fazemos a aplicação de uma função ou algoritmo[4] ao tal objeto.

Assumimos neste caso que temos a descrição completa de uma dada classe de objetos. Em tais construções, atribuímos um número natural (em $\mathbb{N}$) a cada objeto, sendo o zero atribuído aos elementos iniciais e, na hipótese de ter sido atribuído um número[5] n a um objeto da classe, atribuiremos o número $n+1$ ao objeto obtido pelo passo recursivo. (Por exemplo, n seria o número de símbolos acrescentados ao objeto.)

[2]Este é um modo meio pedante de fazer a afirmação *P é uma proposição.*

[3]Veja que usamos aqui a letra grega Φ como uma variável para indicar uma sentença envolvendo a letra P como parâmetro.

[4]Algoritmo é qualquer procedimento que acreditemos ser *mecanizável.*

[5]Usando uma variável n para indicar um elemento de $\mathbb{N}$.

Princípio da Indução Finita: se uma dada propriedade $\Phi(n)$ de números naturais vale em $n = 0$ e se também, para cada n a validade de $\Phi(n)$ implicar a de $\Phi(n+1)$, então é válido concluir que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a propriedade $\Phi(n)$ vale.

Uma dedução por indução corre nos seguintes moldes:

- demonstração de $\Phi(0)$;
- assumir, como premissa, que valha $\Phi(n)$ (n uma variável para número natural);
- após alguma argumentação, concluir que vale $\Phi(n+1)$;
- *como n é genérico*, para todo n, vale que $\Phi(n)$ implica $\Phi(n+1)$;
- concluir, pelo princípio da indução, que para todo n vale $\Phi(n)$.

4.3 Conjuntos e Classes

Vamos assumir que existam os conjuntos de elementos que porventura apareçam neste texto, no sentido que acreditaremos que afirmar sua existência não traga contradições. Por exemplo, o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, etc.

Do ponto de Teoria dos Conjuntos (que não é o assunto deste texto) essa suposição não é problemática, exigindo apenas o uso de alguns dos axiomas dessa teoria. Para referência futura, listaremos os axiomas (premissas sempre presentes) que tradicionalmente têm sido usados:

1. (Extensionalidade) Dois conjuntos são iguais se, e somente se, possuirem os mesmos elementos.
2. (Conjunto vazio) Existe um conjunto sem elementos $\varnothing$ (o conjunto vazio).
3. (Par não ordenado) Para cada x e y, existe um conjunto z contendo exatamente esses dois elementos, $z = \{x, y\}$.
4. (União) Dada uma família de conjuntos x, existe um conjunto y contendo todos os elementos de cada conjunto em x, denotado por $y = \bigcup x$.

5. (Separação) Para cada propriedade[6] de conjuntos (expresso em uma linguagem conveniente) $\varphi(\bar{x}, y)$, em que $\bar{x}$ é uma n-upla de variáveis, existe o conjunto $z = \{y \in u : \varphi(\bar{x}, y)\}$.

6. (Substituição) Para cada propriedade $\varphi(x, y, \bar{u})$ que defina uma função $y = f(x, \bar{u})$ (com parâmetros $\bar{u}$) então a imagem de um conjunto v por esta função também é um conjunto, ou seja, existe o conjunto $w = \{f(x, \bar{u}) : x \in v\}$.

7. (Partes) Existe um conjunto y cujos elementos são todos os subconjuntos de x, $y = P(x)$.

8. (Infinito) Existe um conjunto x tal que $\varnothing \in x$, e se $y \in x$ então $y \cup \{y\} \in x$.

9. (Regularidade) Se $x \neq \varnothing$ então existe um $y \in x$ tal que $x \cap y = \varnothing$. (Este axioma somente interessa a quam estuda Teoria dos Conjuntos.)

10. (Escolha) Se u é uma família de conjuntos não vazios e dois a dois disjuntos, então existe um conjunto v contendo exatamente um elemento de cada $x \in u$.

Observemos que o princípio da indução finita pode ser demonstrado na Teoria dos Conjuntos, uma vez que se saiba como definir uma conjunto de números naturais.

[6]Este, na verdade, pode ser considerado como uma lista infinita de axiomas, um para cada propriedade denotada por φ – esta é uma interpretação mais fácil de aceitar – ou um *meta-axioma* contendo a letra grega φ como uma variável.

Capítulo 5

Cálculo Proposicional

5.1 Conceitos Iniciais

Vamos introduzir a primeira linguagem formal (artificial) em nosso estudo, que é a *Linguagem Proposicional*. Os símbolos com os quais será definida a linguagem proposicional serão os seguintes: $\rightarrow$, $\neg$, $\wedge$ e $\vee$. Serão também usados símbolos de variáveis (proposicionais), dados pelo conjunto $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, a letra maiúscula X com sub-índices números naturais. Também serão usados parênteses como separadores.

Nossa primeira definição recursiva, a de fórmula proposicional e de sua *complexidade*:

- uma variável proposicinal P[1] é uma fórmula (proposicional), chamada de *fórmula atômica*, e sua complexidade é $c(P) = 0$;
- se P for uma fórmula, então $(\neg P)$ também será uma fórmula e sua complexidade é $c(\neg P) = c(P) + 1$;
- se P e Q forem fórmulas, então $(P \rightarrow Q)$, $(P \wedge Q)$ e $(P \vee Q)$ também serão fórmulas e suas complexidades são iguais a $c(P) + c(Q) + 1$.

Alguns autores gostam de incluir uma cláusula de fechamento, dizendo que somente as sequências de símbolos partindo das fórmulas atômicas e aplicando uma quantidade finita de vezes as cláusulas de inserção de símbolos.

[1] Aqui, a letra P serve de variável para fórmulas na metalinguagem.

5.2 Funções de Veracidade e Tabelas-Verdade

Já decidimos que as proposições terão apenas dois valores de veracidade: *Verdadeira*, representado pelo número 1, e *Falso*, representado pelo número 0. Sobre o conjunto $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ introduziremos a ordem linear $<$, pela qual $0 < 1$.

Consideremos as funções $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ (somente consideraremos $n \geq 1$). Para cada $n \in \mathbb{N}$ existem 2^{2^n} tais funções, que serão chamadas de *funções de veracidade*. Seus valores podem ser tabelados, listando as variáveis de f como na tabela 5.1. Essas tabelas serão chamadas de *tabelas-verdade*.

Linhas	X_1	X_2	$\ldots$	X_{n-1}	X_n	$f(X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n)$
0	0	0	$\ldots$	0	0	$f(0, \ldots, 0, 0)$
1	0	0	$\ldots$	0	1	$f(0, \ldots, 0, 1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2^{n-1}	1	1	$\ldots$	1	0	$f(1, \ldots, 1, 0)$
$2^n - 1$	1	1	$\ldots$	1	1	$f(1, \ldots, 1, 1)$

Tabela 5.1: Uma típica tabela de valores de uma função de veracidade, ou tabela-verdade. A ordem em que são listadas as linhas não é importante, mas usamos o artifício de numerar a linha com valores $(a_1, \ldots, a_n)$ pelo índice $\sum_{i=1}^{n} a_i \, 2^{n-i+1}$.

Definiremos a operação unária $- : \{0,1\} \to \{0,1\}$, dada por $-0 = 1$ e $-1 = 0$ (*complemento*), e as operações binárias $\cap : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ e $\cup : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$, dadas pelas seguintes tabelas-verdade:

Linha	X	Y	$X \cap Y$	$X \cup Y$	$X + Y$	$X \vert Y$
0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1
2	1	0	0	1	1	1
3	1	1	1	1	0	0

Tabela 5.2: Tabelas-verdade das funções $\cap$ (mínimo), $\cup$ (máximo), $+$ (soma) e $|$ (incompatibilidade).

Exercício 7 Mostre, por meio de tabelas-verdade, que

1. $X \cap Y = Y \cap X$
2. $X \cup Y = Y \cup X$
3. $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$
4. $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$
5. $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
6. $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
7. $X|X = -X$
8. $X|Y = -(X \cap Y)$
9. $X + Y = Y + X$
10. $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$
11. $X \cdot (Y + Z) = (X \cdot Y) + (X \cdot Z)$, sendo que $\cdot$ é a função $\cap$.

Geração de funções de veracidade: Observemos que com estas três funções, a saber, $\cap$, $\cup$ e $-$, podemos gerar todas as outras, por meio de composições. Considermos primeiramente a função constante e igual a 0, $f_0(X_1, \ldots, X_n) = 0$. Ela pode ser calculada pela expressão

$$f_0(X_1, \ldots, X_n) = (X_1 \cap (-X_1)) \cap X_2 \ldots \cap X_n,$$

se quisermos que todas as n variáveis apareçam na expressão.

Agora, para cada $j = 0, \ldots, 2^n - 1$, seja $L_j = (a_1, \ldots, a_n)$ uma lista de atribuições de valores 0 ou 1 às variáveis $X_1, \ldots, X_n$, (por exemplo, os números $a_1, \ldots, a_n$ formam o código binário do número $j = \sum_{k=1}^{n} a_k 2^{n-k}$) e seja $g_j(X_1, \ldots, X_n)$ a função que atribui o valor 1 à n-upla L_j e zero às outras n-uplas. Sejam $X_i^{L_j} = X_i$, se $a_i = 1$, e $X_i^{L_j} = -X_i$, se $a_i = 0$. Então $g_j(X_1, \ldots, X_n) = X_1^{L_j} \cap \ldots \cap X_n^{L_j}$ (verifique, como exercício).

Dada $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ não identicamente zero, seja $U(f) = \{j : f(L_j) = 1\}$ (o conjunto dos índices das linhas em que a tabela-verdade de f atribua-lhe o valor 1). Então $f(X_1, \ldots, X_n) = \bigcup_{j \in U(f)} g_j(X_1, \ldots, X_n)$.

Exercício 8 Este exercício lista todas as possibilidades de um conjunto de geradores independentes para todas as funções binárias (ou de veracidade). São 36 possibilidades e foram determinadas por Emil Leon Post, em sua obra *The Two-Valued Iterative Systems of Mathematical Logic*[2]. Alguns dos itens abaixo dependem de informação contida na tabela 5.3, na página 30. Mostre que, em cada um dos casos abaixo, as funções listadas geram todas as funções de veracidade:

1. $f(X,Y) = X|Y$
2. $f(X,Y) = -(X \cup Y)$
3. $f_0(X) = -X,\ f_1(X,Y) = X \cap Y$
4. $f_0(X) = -X,\ f_1(X,Y) = X \cup Y$
5. $f_0(X) = -X,\ f_1(X,Y) = X \Rightarrow Y = (-X) \cup Y$
6. $f_0(X) = -X,\ f_1(X,Y) = -(X \Rightarrow Y) = X \cap (-Y)$
7. $f_0(X) = 1$ (constante), $f_1(X,Y,Z) = -\alpha_3'(X,Y,Z)$ (veja a tabela 5.3, na página 30)
8. $f_0(X) = 1$ (constante), $f_1(X,Y,Z) = -\alpha_3''(X,Y,Z)$ (veja a tabela 5.3, na página 30)
9. $f_0(X) = 0$ (constante), $f_1(X,Y,Z) = -\alpha_3'(X,Y,Z)$ (veja a tabela 5.3, na página 30)
10. $f_0(X) = 0$ (constante), $f_1(X,Y,Z) = -\alpha_3''(X,Y,Z)$ (veja a tabela 5.3, na página 30)
11. $f_0(X) = 1$ (constante), $f_1(X) = -X,\ f_2(X,Y,Z) = \alpha_3'(X,Y,Z)$ (veja a tabela 5.3, na página 30)
12. $f_0(X) = 1$ (constante), $f_1(X) = -X,\ f_2(X,Y,Z) = \alpha_3''(X,Y,Z)$ (veja a tabela 5.3, na página 30)
13. $f_0(X) = 0$ (constante), $f_1(X) = -X,\ f_2(X,Y,Z) = \alpha_3'(X,Y,Z)$ (veja a tabela 5.3, na página 30)

[2] Annals of Mathematical Studies, Princeton University Press, EUA, 1941.

14. $f_0(X) = 0$ (constante), $f_1(X) = -X$, $f_2(X, Y, Z) = \alpha_3''(X, Y, Z)$ (veja a tabela 5.3, na página 30)

15. $f_0(X) = 0$ (constante), $f_1(X, Y) = (-X) \cup Y$

16. $f_0(X) = 1$ (constante), $f_1(X, Y) = X \cap (-Y)$

17. $f_0(X) = 1$, $f_1(X) = 0$ (constantes), $f_2(X, Y, Z) = \alpha_3'(X, Y, Z)$ (veja a tabela 5.3, na página 30)

18. $f_0(X) = 1$, $f_1(X) = 0$ (constantes), $f_2(X, Y, Z) = \alpha_3^n(X, Y, Z)$, uma f_2 para cada n, $4 \leq n \leq 13$ (são, portanto, 10 listas de geradores - veja a tabela 5.3, na página 30)

19. $f_0(X) = 0$ (constante), $f_1(X, Y) = X \cap (-Y)$, $f_2(X, Y) = X \cup Y$

20. $f_0(X) = 0$ (constante), $f_1(X, Y) = X \cap (-Y)$, $f_2(X, Y) = X \cap Y$

21. $f_0(X) = 1$ (constante), $f_1(X, Y) = (-X) \cup Y$, $f_2(X, Y) = X \cup Y$

22. $f_0(X) = 1$ (constante), $f_1(X, Y) = (-X) \cup Y$, $f_2(X, Y) = X \cap Y$

23. $f_0(X) = 0$ (constante), $f_1(X, Y) = (-X) \cup Y$, $f_2(X, Y, Z) = \alpha_3''(X, Y, Z)$ (veja a tabela 5.3, na página 30)

24. $f_0(X) = 1$ (constante), $f_1(X, Y) = X \cup (-Y)$, $f_2(X, Y, Z) = \alpha_3''(X, Y, Z)$ (veja a tabela 5.3, na página 30)

25. $f_0(X) = 1$, $f_1(X) = 0$ (constantes), $f_2(X, Y) = X \cup Y$, $f_3(X, Y, Z) = \alpha_3''(X, Y, Z)$ (veja a tabela 5.3, na página 30)

26. $f_0(X) = 1$, $f_1(X) = 0$ (constantes), $f_2(X, Y) = X \cap Y$, $f_3(X, Y, Z) = \alpha_3''(X, Y, Z)$ (veja a tabela 5.3, na página 30)

27. $f_0(X) = 1$, $f_1(X) = 0$ (constantes), $f_2(X, Y, Z) = \alpha_3''$, $f_3(X, Y, Z) = \alpha_3'''(X, Y, Z)$ (veja a tabela 5.3, na página 30)

XYZ	α_3'	α_3''	α_3'''	α_3^4	α_3^5	α_3^6	α_3^7	α_3^8	α_3^9	α_3^{10}	α_3^{11}	α_3^{12}	α_3^{13}
000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
001	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0
010	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1
011	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
100	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
101	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
110	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
111	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabela 5.3: As funções ternárias α_3', α_3'', α_3''', e α_3^n, $4 \leq n \leq 13$, usadas como parte dos geradores das funções binárias.

5.3 Dedução Formal

Uma *dedução formal* no Cálculo Proposicional da proposição P a partir de premissas $Q_1, \ldots, Q_m$, é uma sequência (finita) de fórmulas proposicionais, $P_1, \ldots, P_n$, $n \geq 1$, satisfazendo as seguintes regras (recursivas), para cada i, $1 \leq i \leq n$:

1. ou P_i é alguma das premissas Q_j, para algum j, $1 \leq j \leq m$;

2. ou P_i é um *axioma*, ou seja uma dentre certas fórmulas proposicionais que serão selecionadas neste capítulo e que receberão tal nome;

3. ou P_i foi obtida por *Modus Ponens* (também chamada de *regra do destacamento*) de duas fórmulas proposicionais anteriores, ou seja, existem $j, k < i$, tais que a fórmula P_k é $P_j \to P_i$ e P_i foi *destacada* desta fórmula pela presença da fórmula P_j na sequência;

4. a fórmula P_n é a fórmula P, conclusão final deste *discurso.*

A notação $Q_1, \ldots, Q_m \vdash P$ (ou mais geralmente, $\Gamma \vdash P$, sendo que Γ é um conjunto finito ou infinito de fórmulas proposicionais, podendo ser vazio, caso em que denotamos apenas $\vdash P$) significa que existe uma dedução formal de P a partir das premissas $Q_1, \ldots, Q_m$ (ou de Γ, ou sem premissas, respectivamente).

Observemos que a definição de dedução formal não impõe que sejam usadas todas as hipóteses e nem que não haja redundâncias (por exemplo, citar hipóteses desnecessárias). A lógica que impõe tais restrições é diferente da que estamos estudando (chama-se *lógica relevante*) e tem bastante interesse para o estudo dos fundamentos da matemática, principalmente sob seu aspecto computacional. No entanto, as técnicas e ferramentas introduzidas no nosso estudo são úteis para o estudo de outras lógicas.

5.3.1 Os Conectivos Proposicionais

Introduziremos os conectivos proposicionais $\rightarrow$, $\neg$, $\wedge$ e $\vee$ a seguir, com os axiomas que cada um deve respeitar.

Vamos associar uma função de veracidade (ou binária, ou também, booleana) a cada fórmula proposicional A, recursivamente por:

1. a cada variável proposicional P_n, associamos a função $v_{P_n}(X_n) = X_n$;

2. seja A uma fórmula propósicional e v_A sua função associada; então associamos à fórmula $(\neg A)$ a função $v_{\neg A} = -v_A$;

3. sejam A e B duas fórmulas proposicionais, v_A e v_B suas respectivas funções associadas; então serão associadas às fórmulas $A \wedge B$, $A \vee B$ e $A \rightarrow B$ as funções $v_{A\wedge B} = v_A \cap v_B$, $v_{A\vee B} = v_A \cup v_B$ e $v_{A\rightarrow B} = (-v_A) \vee v_B$, respectivamente.

Daqui em diante, as tabelas-verdade referir-se-ão diretamente às fórmulas proposicionais correspondentes, segundo essa associação.

Uma *tautologia* é uma fórmula proposicional A, cuja função booleana correspondente v_A seja constante e igual a 1.

5.3.2 A Implicação e o Teorema da Dedução

A implicação "*se A então B*"tem a tabela verdade dada por

O primeiro axioma a seguir expressa que se a tese da implicação for verdadeira, então a implicação também o é:

Axioma 1 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Tabela 5.4: Tabela-verdade da implicação.

O segundo expressa uma espécie de *propriedade distributiva* da implicação:

Axioma 2 $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

Vamos mostrar que a presença destes dois axiomas em qualquer sistema de axiomas caracterizam a seguinte afirmação:

> A implicação $(A \to B)$ é dedutível (talvez usando hipótese contidas num conjunto de fórmulas proposicionais Γ se, e somente se, B puder ser dedutível da hipótese A - e as hipóteses de Γ utilizadas).

Esta afirmação é o chamado Teorema da Dedução, que foi demonstrado primeiramente na tese de doutoramento de Jacques Herbrand[3]. Este teorema é válido para qualquer sistema de axiomas que contenham esses dois primeiros.

Para futura referência, destacamos inicialmente o seguinte resultado, que será usado também no Teorema da Dedução.

Lema 5.3.1 A fórmula $(A \to A)$ (reflexividade da implicação) é dedutível sem hipótses, ou seja, $\vdash (A \to A)$.

Demonstração: A seguinte dedução prova este lema:

1. $A \to ((A \to A) \to A)$ (*Axioma 1*)

[3]Viveu de 12/02/1908 a 27/07/1931 – morreu com 23 anos em um acidente de alpinismo nos Alpes Franceses. Apesar de ter rido uma vida tão curta, produziu resultados importantes em Lógica, particularmente na área da Teoria da Demonstração.

2. $(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ (*Axioma 2*)
3. $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ (*MP de 1 e 2*)
4. $A \to (A \to A)$ (*Axioma 1*)
5. $(A \to A)$ (*MP de 3 e 4*) $\square$

Teorema 5.3.1 (Teorema da Dedução.) Sejam Γ um conjunto (possivelmente vazio) de fórmulas proposicionais e A uma fórmula proposicional. Então são equivalentes as seguintes afirmações:

1. $\Gamma, A \vdash B$,
2. $\Gamma \vdash (A \to B)$.

Demonstração: Suponhamos primeiramente que $\Gamma \vdash (A \to B)$, e seja $A_1, \ldots, A_n$ uma dedução de $(A \to B)$ (que é a fórmula A_n) a partir de hipóteses de Γ. Então:

- A_1
- $\vdots$
- A_n (que é $(A \to B)$)
- A (listamos a hipótese A)
- B (MP das duas últimas fórmulas)

é uma dedução de B a partir de hipóteses de Γ e da hipótese A, testemunhando o fato que $\Gamma, A \vdash B$.

Reciprocamente, suponhamos que $\Gamma, A \vdash B$, e seja $A_1, \ldots, A_n$ uma dedução de B (que é a fórmula A_n) a partir de hipóteses de Γ e, possivelmente, usando a hipótese A. Vamos obter indutivamente uma dedução $B_1, \ldots, B_m$, de tamanho no máximo $m = 3n + 2$, e tal que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, exitirá $j \in \{1, \ldots, m\}$, tal que B_j será a fórmula $(A \to A_i)$. Como o A_1 somente pode ser axioma ou hipótese de Γ ou a fórmula A, e como estas situações podem ocorrer com alguns dos A_i's, trataremo genericamente de uma fórmula A_i da dedução original.

Se a fórmula A_i for um axioma, temos:

$$\begin{array}{ll}
\vdots & \vdots \\
A_i & (\text{axioma}) \left\{ \begin{array}{rll} B_{j-2}: & A_i \to (A \to A_i) & (\text{axioma}) \\ B_{j-1}: & A_i & (\text{axioma}) \\ B_j: & (A \to A_i) & (\text{MP de } j-2 \text{ e } j-1) \end{array} \right. \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Se a fórmula A_i for hipótese de Γ:

$$\begin{array}{lll}
\vdots & \vdots & \vdots \\
A_i \in \Gamma & (\text{hipótese}) & \left\{ \begin{array}{rll} B_{j-2}: & A_i \to (A \to A_i) & (\text{axioma}) \\ B_{j-1}: & A_i \in \Gamma & (\text{hipótese}) \\ B_j: & (A \to A_i) & (\text{MP: } j-2,\ j-1) \end{array} \right. \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Se a fórmula A_i for a hipótese A, usamos o lema acima:

$$\begin{array}{ll}
\vdots & \vdots \\
A & \left\{ \begin{array}{rl} B_{j-4}: & A \to ((A \to A) \to A) \\ B_{j-3}: & (A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)) \\ B_{j-3}: & (A \to (A \to A)) \to (A \to A) \\ B_{j-3}: & A \to (A \to A) \\ B_j: & (A \to A) \end{array} \right. \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Por fim, suponhamos que A_i fora obtida pela regra do *Modus Ponens* (ou MP) de A_k e de A_l $(A_k \to A_i)$. Por hipótese de indução, já obtivemos B_m $(A \to A_k)$ e B_p $(A \to A_l)$, para $m, p < j$. Assim, teremos:

$$
\begin{array}{lll}
\vdots & & \\
A_k & & \left\{\begin{array}{ll} \vdots & \vdots \\ B_m: & A \to A_k \end{array}\right. \\
\vdots & & \vdots \\
A_k \to A_i & & \left\{\begin{array}{ll} \vdots & \vdots \\ B_p: & A \to A_l \end{array}\right. \\
\vdots & & \vdots \\
A_i & \left\{\begin{array}{rl} B_{j-2}: & (A \to A_l) \to ((A \to A_k) \to (A \to A_i)) \text{ (axioma 2)} \\ B_{j-1}: & (A \to A_k) \to (A \to A_i) \text{ (MP: } p,\ j-2) \\ B_j: & (A \to A_i) \text{ (MP: } m,\ j-1) \end{array}\right. & \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Observemos que se A_i for axioma, ou $A_i \in \Gamma$, ou A_i foi obtida por MP, então foram produzidas três fórmulas proposicionais na composição da dedução $B_1, \ldots, B_m$, impondo que $m \geq 3n$. Suponhamos que a fórmula A tenha sido usada como hipótese (e listada apenas uma vez entre os A_i's, para evitar redundâncias desnecessárias). Neste caso, o comprimento da dedução obtida será $m = 3(n-1) + 5 = 3n + 2$. $\square$

Exercício 9 Mostre que se A não foi usada como hipótese, ou seja, que $\Gamma \vdash B$, com uma dedução de comprimento n, então existe uma dedução de comprimento $n + 2$ de $(A \to B)$ a partir de Γ.

Exercício 10 Suponha que somente as hipóteses $A_1, \ldots, A_N$ foram relamente usadas numa dedução da fórmula B. Suponha ainda que tal dedução tenha comprimento (ou número de fórmulas listadas) m. Calcule o comprimento da dedução produzida pelo uso do Teorema da Dedução, da fórmula

$$A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to \ldots \to (A_n \to B) \ldots)).$$

O Teorema da Dedução é muito útil para mostrar a existência de deduções de determinadas fórmulas proposicionais.

Lema 5.3.2 A propriedade da transitividade da implicação é dedutível, ou seja,

$$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)).$$

Demonstração: Se mostrarmos que

$$(A \to B), (B \to C), A \vdash C,$$

o Teorema da Dedução produzirá a dedução desejada. Vejamos:

1. $(A \to B)$ (*hipótese*)
2. A (*hipótese*)
3. B (*MP: 1 e 2*)
4. $(B \to C)$ (*hipótese*)
5. C (*MP: 3 e 4.*)

Esta dedução formal é testemunha da veracidade da afirmação que $(A \to B), (B \to C), A \vdash C$. □

5.3.3 A Negação

A tabela 5.5 contém a tabela-verdade do símbolo $\neg$ (*negação*).

A	$\neg A$
0	1
1	0

Tabela 5.5: Tabela-verdade da negação $\neg A$.

Os princípios da não contradição e do terceiro excluído impõem o seguinte axioma:

Axioma 3 $(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$

Este axioma, junto com os dois primeiros, é suficiente para demonstrar as seguintes fórmulas proposicionais (que são tautologias - verifique esta afirmação).

Lema 5.3.3 São dedutíveis a partir dos três primeiros axiomas:

1. $\vdash (\neg\neg A) \to A$
2. $\vdash (\neg\neg\neg A) \to (\neg A)$
3. $\vdash A \to (\neg\neg A)$
4. $\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

Demonstração:

(1) Pelo Teorema da Dedução, basta exibir uma dedução para $\neg\neg A \vdash A$, e como precisamos eliminar negações, usaremos o Axioma 3 com última conclusão a fórmula A; tendo como hipótese a fórmula $(\neg\neg A)$ e tendo já provado que $\vdash (\neg A) \to (\neg A)$, basta deduzir $((\neg A) \to (\neg\neg A))$ para obtermos as hipóteses do Axioma 3:

1. $\neg\neg A$ (*hipótese*)
2. $(\neg\neg A) \to ((\neg A) \to (\neg\neg A))$ (*axioma 1*)
3. $(\neg A) \to (\neg\neg A)$ (*MP: 1, 2*)
4. $((\neg A) \to (\neg A))$ (*incorporar*[4] *a dedução - já feita no Lema 5.3.1 - desta fórmula*)
5. $((\neg A) \to (\neg A)) \to (((\neg A) \to (\neg\neg A)) \to A)$ (*axioma 3*)
6. $((\neg A) \to (\neg\neg A)) \to A$ (*MP: 4, 5*)
7. A (*MP: 3, 6*)

[4] Na verdade, isto somente seria necessário se quiséssemos uma dedução formal explicitamente. Como a intenção aqui é mostrar a existência de uma tal dedução, basta citar o que já foi obtido *anteriormente* - cuidado com circularidade de raciocínio!

(2) É a repetição de (1) com a fórmula $\neg A$ no lugar de A.

(3) Pelo Teorema da Dedução, basta exibir dedução que testemunhe que $A \vdash \neg\neg A$, sendo que agora precisamos introduzir negações. O truque será o uso do Axioma 3 com última conclusão a fórmula $(\neg\neg A)$ e, portanto, precisamos ter como hipóteses $((\neg\neg\neg A) \to B)$ e $((\neg\neg\neg A) \to (\neg B))$. Como já temos a fórmula A disponível como hipótese e como já tínhamos provado em (2) que $\vdash (\neg\neg\neg A) \to (\neg A)$, tomemos B como sendo a fórmula A:

1. A (*hipótese*)
2. $A \to ((\neg\neg\neg A) \to A)$ (*axioma 1*)
3. $(\neg\neg\neg A) \to A$ (*MP: 1, 2*)
4. $(\neg\neg\neg A) \to (\neg A)$ (*incorporar a dedução já feita em (2)*)
5. $((\neg\neg\neg A) \to A) \to (((\neg\neg\neg A) \to (\neg A)) \to (\neg\neg A))$ (*axioma 3*)
6. $((\neg\neg\neg A) \to (\neg A)) \to (\neg\neg A)$ (*MP: 3, 5*)
7. $\neg\neg A$ (*MP: 4, 6*)

(4) Agora usaremos o Teorema da Dedução e também a propriedade transitiva da implicação (veja o Lema 5.3.2), para provar que $(A \to B), (A \to (\neg B)) \vdash \neg A$, novamente usando o Axioma 3 (como a conclusão pretendida é $(\neg A)$, precisamos produzir deduções das hipóteses $((\neg\neg A) \to B)$ e $((\neg\neg A) \to (\neg B))$):

1. $(A \to B)$ (*hipótese*)
2. $(\neg\neg A) \to A$ (*incorporar a dedução já feita em (1)*)
3. $((\neg\neg A) \to A) \to ((A \to B) \to ((\neg\neg A) \to B))$ (*incorporar a dedução contida no Lema 5.3.2*)
4. $(A \to B) \to ((\neg\neg A) \to B)$ (*MP: 2, 3*)
5. $(\neg\neg A) \to B$ (*MP: 1, 4*)
6. $(A \to (\neg B))$ (*hipótese*)

7. $((\neg\neg A) \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow (\neg B)) \rightarrow ((\neg\neg A) \rightarrow (\neg B)))$ (*incorporar a dedução contida no Lema 5.3.2*)

8. $(A \rightarrow (\neg B)) \rightarrow ((\neg\neg A) \rightarrow (\neg B))$ (*MP: 2, 7*)

9. $(\neg\neg A) \rightarrow (\neg B)$ (*MP: 6, 8*)

10. $((\neg\neg A) \rightarrow B) \rightarrow (((\neg\neg A) \rightarrow (\neg B)) \rightarrow (\neg A))$ (*axioma 3*)

11. $((\neg\neg A) \rightarrow (\neg B)) \rightarrow (\neg A)$ (*MP: 5, 10*)

12. $\neg A$ (*MP: 9, 11*) $\square$

Exercício 11 Obtenha uma dedução da propriedade da *contrapositiva* da implicação, ou seja:

1. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg B) \rightarrow (\neg A))$

2. $\vdash ((\neg B) \rightarrow (\neg A)) \rightarrow (A \rightarrow B)$

Exercício 12 Mostre que a seguinte forma mais fraca do Axioma 3 não é suficiente para demonstrá-lo:

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$$

ou seja, se usarmos os dois primeiros axiomas e esta fórmula como terceiro axioma, então a fórmula

$$(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$$

não é dedutível. Para isto, usaremos o seguinte método: tabelas-verdade trivaloradas, que consiste em atribuir as tabelas de valores aos conectivos contidas nas Tabelas 5.6 e 5.7 e verificar, por indução nas deduções neste sistema, que as fórmulas dedutíveis assumem apenas o valor 2, enquanto que a versão original do Axioma 3 assume outros valores. Observe que, com a presença dos dois primeiros axiomas, o Teorema da Dedução ainda continua disponível.

A	$\neg A$
0	2
1	0
2	0

Tabela 5.6: Tabela trivalorada para a negação.

A	B	$A \to B$
0	0	2
0	1	2
0	2	2
1	0	0
1	1	2
1	2	2
2	0	0
2	1	1
2	2	2

Tabela 5.7: Tabela trivalorada para a implicação.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Tabela 5.8: Tabelas-verdade da conjunção ($A \wedge B$) e da disjunção ($A \vee B$).

5.3.4 Outros Conectivos Proposicionais

As tabelas-verdade para os conectivos $\wedge$ (*conjunção*, ou o conectivo "*e*") e $\vee$ (*disjunção*, também conhecido como "*ou - náo exclusivo*") estão na tabela 5.8.

Os axiomas para a conjunção são três, sendo que os dois primeiros introduzem o conectivo $\wedge$ do lado esquerdo (ou o da premissa) de uma implicação, e o terceiro o introduz do lado direito (ou da conclusão).

Axioma 4 $(A \wedge B) \to A$

Axioma 5 $(A \wedge B) \to B$

Observemos que são necessários ambos axiomas para que seja demonstrada a equivalência entre $A \wedge B$ e $B \wedge A$.

Axioma 6 $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \wedge C)))$

Lema 5.3.4 São dedutíveis:

1. $\vdash (A \wedge B) \to (B \wedge A)$ e $\vdash (B \wedge A) \to (A \wedge B)$
2. $\vdash A \to (B \to (A \wedge B))$

Demonstração: (1) Por simetria de argumentação, basta exibir dedução testemunhando que $\vdash (A \wedge B) \to (B \wedge A)$.

1. $(A \wedge B) \to A$ (*axioma 4*)
2. $(A \wedge B) \to B$ (*axioma 5*)
3. $((A \wedge B) \to B) \to (((A \wedge B) \to A) \to ((A \wedge B) \to (B \wedge A)))$ (*axioma 6*)
4. $((A \wedge B) \to A) \to ((A \wedge B) \to (B \wedge A))$ (*MP: 2, 3*)
5. $(A \wedge B) \to (B \wedge A)$ (*MP: 1,4*)

(2) Pelo Teorema da Dedução, basta exibirmos uma dedução testemunhando que $A, B \vdash (A \wedge B)$.

1. $A \to A$ (*incorporar a demonstração, feita no Lema 5.3.1, desta tautologia aqui*)
2. $B \to (A \to B)$ (*axioma 1*)
3. B (*hipótese*)

4. $(A \to B)$ (*MP: 2, 3*)
5. $(A \to A) \to ((A \to B) \to (A \to (A \wedge B)))$ (*axioma 6*)
6. $(A \to B) \to (A \to (A \wedge B))$ (*MP: 1, 5*)
7. $A \to (A \wedge B)$ (*MP: 4, 6*)
8. A (*hipótese*)
9. $(A \wedge B)$ (*MP: 7, 8*) □

Os axiomas para a disjunção são três, sendo que os dois primeiros introduzem o conectivo $\vee$ do lado direito (ou o da conclusão) de uma implicação, e o terceiro o introduz do lado esquerdo (ou da premissa).

Axioma 7 $A \to (A \vee B)$

Axioma 8 $B \to (A \vee B)$

Axioma 9 $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$

Por fim, o axioma que junta a disjunção, a conjunção e a negação:

Axioma 10 $(\neg(A \wedge B)) \to ((\neg A) \vee (\neg B))$

Exercício 13 Verifique que todos os axiomas listados são tautologias.

Exercício 14 Ache dedução das seguintes fórmulas, usando o Teorema da Dedução, se achar necessário. Podem ser usadas deduções anteriores, mas nunca as posteriores, para evitar argumentos circulares (do tipo, usa A para provar B e B para provar A).

1. $\vdash (A \vee B) \to (B \vee A)$ (não é preciso usar o Teorema da Dedução aqui)
2. $A \to (B \to C) \vdash (A \wedge B) \to C$
3. $(A \wedge B) \to C \vdash A \to (B \to C)$
4. $(A \to B) \vdash (A \wedge C) \to (B \wedge C)$

5. $(A \to B) \vdash (A \vee C) \to (B \vee C)$
6. $((\neg A) \vee B) \vdash (A \to B)$ (dica: use uma forma conveniente do axioma 9)
7. $\neg(A \vee B) \vdash ((\neg A) \wedge (\neg B))$ (use o axioma 10 e a propriedade da contrapositiva da implicação)
8. $((\neg A) \vee (\neg B)) \vdash \neg(A \wedge B)$ (use formas convenientes dos axiomas 4, 5 e 9, além da propriedade contrapositiva da implicação)
9. $(B \wedge (\neg C)) \vdash \neg(B \to C)$
10. $\neg(B \to C) \vdash (B \wedge (\neg C))$
11. $\neg(A \wedge (\neg A))$
12. $A \vee (\neg A)$

Exercício 15 Seja Γ, um conjunto de hipóteses. Demonstre as seguintes afirmações:

1. Se $\Gamma \vdash A$ e $\Gamma \vdash B$, então $\Gamma \vdash (A \wedge B)$.
2. Se $\Gamma, A \vdash C$ e $\Gamma, B \vdash C$, então $\Gamma, (A \vee B) \vdash C$.
3. Se $\Gamma, A \vdash B$ e $\Gamma, (\neg A) \vdash B$, então $\Gamma \vdash B$.
4. Se $\Gamma \vdash B$, então $\Gamma \vdash (A \to B)$
5. Se $\Gamma \vdash (\neg A)$, então $\Gamma \vdash (A \to B)$.

5.4 Correção e Completude

As tabelas-verdade introduzidas para os conectivos proposicionais dão significado a eles, dizendo em que casos as fórmulas proposicionais obtidas são verdadeiras (valor 1) ou falsas (valor 0). Escolhemos dez padrões de fórmulas proposicionais, que são tautologias, e as chamamos de *axiomas*. Definimos também o que vem a ser uma dedução formal, como uma sequência de fórmulas proposicionais satisfazendo o requisito de que cada uma delas pode ser a citação de uma hipótese, ou a citação de um axioma, ou ela pode ser obtida de duas fórmulas anteriormente listadas, pela regra de *Modus Ponens* (abreviadamente, MP).

Mostremos que essa noção de dedução formal é *correta* em relação às tabelas-verdade, no sentido que, se partirmos de hipóteses verdadeiras, obteremos conclusões verdadeiras, ou, mais geralmente, o valor da conclusão não póde ser menor do que o menor valor das hipóteses.

Teorema 5.4.1 (Teorema da Correção) Se $\vdash A$, então A é uma tautologia. Mais geralmente, dados o conjunto de hipóteses Γ e $v : \mathrm{Var} \to \{0,1\}$ (uma linha de tabela-verdade), se $\Gamma \vdash A$, então $v(A) \geq \inf\{v(C) : C \in \Gamma\}$.

Demonstração: Seja $v : \mathrm{Var} \to \{0,1\}$ (uma linha de tabela-verdade) e suponha que afirmação $\Gamma \vdash A$ seja testemunhada pela dedução formal $A_1, \ldots, A_n$. Se, para algum $C \in \Gamma$ acontecer que $v(C) = 0$, então, certamente, $v(A) \geq 0$ e nada mais precisamos demonstrar. portanto, podemos supor que $v(C) = 1$, para cada $C \in \Gamma$. Por indução em $i \in \{1, \ldots, n\}$, provaremos que $v(A_i) = 1$. Se A_i for axioma, sendo uma tautologia, certamente $v(A_i) = 1$. Se A_i for hipótese de Γ, $v(A_i) = 1$ devido à suposição feita acima. Se foi obtida pela regra do *Modus Ponens* de A_j e A_k, com $1 \leq j, k < i \leq n$, digamos que A_k seja a fórmula $(A_j \to A_i)$. Por hipótese de indução, $v(A_j) = v(A_k) = v(A_j \to A_i) = 1$. Mas isto somente poderá ocorrer se $v(A_i) = 1$, como queríamos. $\square$

Exercício 16 Verifique, usando o Teorema da Correção, que:

1. $(A \to B) \nvdash (B \to A)$
2. $((A \wedge C) \to (B \wedge C)) \nvdash (A \to B)$
3. $((A \vee C) \to (B \vee C)) \nvdash (A \to B)$

O Teorema da Completude[5] diz a recíproca da Correção, ou seja, se for tautologia, então será dedutível. O sistema dedutivo introduzida é completo, no sentido de deduzir tudo o que pode ser corretamente deduzido.

[5]No dicionário podemos encontrar a substantivação *completitude* do adjetivo *completo*. Mas tem sido praxe dos lógicos usar a palavra *completude* para significar o que vamos estudar aqui.

O ingrediente principal é o resultado seguinte, que produz uma dedução a partir de informação acerca de tabelas-verdade das fórmulas envolvidas. Observemos que, no caso proposicional, tudo o qua provamos é algorítmico.

Teorema 5.4.2 Seja $v : \mathrm{Var} \to \{0,1\}$ (uma linha de tabela-verdade) e, para cada fórmula proposicional A, seja A' a própria fórmula A se $v(A) = 1$ e $(\neg A)$, caso $v(A) = 0$. Suponha que as variáveis proposicionais que ocorram em A estejam entre as seguintes: $P_0, \ldots, P_n$. Então

$$P_0', \ldots P_n' \vdash A'.$$

Demonstração: Esta será uma demonstração por indução na complexidade da fórmula A.

O passo inicial é trivial: $P_0', \ldots, P_j', \ldots, P_n' \vdash P_j'$.

Suponha que este teorema já tenha sido provado para todas as fórmulas de complexidade menor ou igual a n e seja A uma fórmula de complexidade $n+1$. Temos que considerar quatro casos. Para economizar na notação, seja $\Gamma' = \{P_0', \ldots, P_n'\}$.

Caso 1 (negação): A é a fórmula $\neg B$ e a hipótese de indução se aplica à fórmula B, ou seja, $\Gamma' \vdash B'$. Caso $v(B) = 0$, então $v(A) = 1$ e B' é a fórmula $(\neg B)$, ou seja A, que coincide com A'. Portanto $\Gamma' \vdash A'$ decorre diretamente da hipótese de indução. No caso em que $v(B) = 1$, temos que $v(A) = 0$ e, portanto B' é B e A' é $(\neg\neg B)$. Como, por hipótese de indução, $\Gamma' \vdash B$ e como $\vdash (B \to (\neg\neg B))$, segue que $\Gamma' \vdash (\neg\neg B)$, ou seja, $\Gamma' \vdash A'$.

Caso 2 (implicação): A é a fórmula $(B \to C)$ e a hipótese de indução aplica-se a B e a C, ou seja, $\Gamma' \vdash B'$ e $\gamma' \vdash C'$. Se $v(C) = 1$, então $v(A) = 1$ e A' coincide com A e, por hipótese de indução, $\Gamma' \vdash C$, o que implica que $\Gamma' \vdash (B \to C)$, ou seja $\gamma' \vdash A'$. O mesmo ocorre com o caso em que $v(B) = 0$. Se $v(C) = 0$ e $v(B) = 1$, então $v(A) = 0$ e A' é a fórmula $\neg(B \to C)$. Como B' é B e C' é $(\neg C)$, a hipótese de indução consiste em $\Gamma' \vdash B$ e $\Gamma' \vdash (\neg C)$, o que implica que $\Gamma' \vdash (B \wedge (\neg C))$. Como $(B \wedge (\neg C)) \vdash \neg(B \to C)$, obtemos a conclusão desejada: $\Gamma' \vdash A'$.

Caso 3 (disjunção): A é $(B \vee C)$. O tratamento é análogo ao do caso 2 e fica como exercício.

Caso 4 (disjunção): A é $(B \wedge C)$. Se $v(A) = 1$, então $v(B) = v(C) = 1$ e a hipótese de indução toma a forma $\Gamma' \vdash B$ e $\Gamma' \vdash C$, o que implica que $\Gamma' \vdash (B \wedge C)$, ou seja, $\Gamma' \vdash A'$. Se $v(A) = 0$, então $v(B) = 0$ ou $v(C) = 0$. Caso seja $v(B) = 0$, B' é $(\neg B)$ e a hipótese de indução toma a forma $\Gamma' \vdash (\neg B)$. Usando o axioma 4 e a propriedade da comtrapositiva da implicação, obtemos que $\Gamma' \vdash \neg(B \wedge C)$, isto é, $\Gamma' \vdash A'$. O caso em que $v(C) = 0$ tem tratamento similar. $\Box$

Teorema 5.4.3 (Teorema da Completude) Sejam Γ, um conjunto de hipóteses, e A, uma fórmula proposicional, tais que, para todas $v : \mathrm{Var} \to \{0, 1\}$ atribuindo $v(C) = 1$ a cada $C \in \Gamma$, também atribuem $v(A) = 1$. Então $\Gamma \vdash A$. Em particular, se A for uma tautologia, então $\vdash A$.

Demonstração: Primeiramente, suponhamos que A não seja uma tautologia (isto implica que Γ não pode ser vazio!). Afirmamos que existem $C_1, \ldots, C_k \in \Gamma$ (um conjunto de hipóteses que pode até ser infinito), tais que $(C_1 \to (C_2 \to (\ldots \to (C_k \to A) \ldots)))$ será uma tautologia.

De fato, se A contiver n variáveis proposicionais, sua tabela-verdade terá 2^n linhas. Sejam $L_1, \ldots, L_k$ $(k \geq 1)$ todas as linhas em que A valha 0. Por hipótese sobre Γ e A, devem existir C_1, $\ldots$, $C_k \in \Gamma$, tais que C_i valerá 0 na linha L_i, $1 \leq i \leq k$. Assim, a fórmula $(C_1 \to (C_2 \to (\ldots \to (C_k \to A) \ldots)))$ valerá 1 nessas linhas e também nas outras (verifique esta afirmação, como exercício!), ou seja, será uma tautologia.

Na presença do Teorema da Dedução, basta demonstrarmos este Teorema para uma tautologia A.

Seja A uma tautologia e sejam $P_0, \ldots, P_n$ variáveis proposicionais tais que essa lista contenha as variáveis que ocorram em A. Sejam $v_j = (a_{0,j}, \ldots, a_{n,j}) \in \{0, 1\}^n$, $0 \leq j = \sum_{m=0}^{n} a_{m,j}\, 2^{n-m} \leq 2^{n+1} - 1$, atribuições de valores às variáveis $P_0, \ldots, P_n$. Para cada i e cada j, seja $P_i^{L_j}$ a própria variável P_i se $a_{i,j} = 1$, e a sua negação, $(\neg P_i)$, caso $a_{i,j} = 0$. Sejam $\Gamma'_j = \{P_0^{L_j}, \ldots, P_n^{L_j}\}$, $0 \leq j \leq 2^{n+1} - 1$. Pelo teorema anterior, $\Gamma'_j \vdash A$. Vamos eliminar as hipóteses, considerando, em primeiro lugar, os pares $\Gamma'_{2k} \vdash A$ e $\Gamma'_{2k+1} \vdash A$. Com a enumeração indicada acima dos conjuntos de hipóteses, vemos que a última fórmula de Γ'_{2k} é $(\neg P_n)$ e a de Γ'_{2k+1} é P_n, sendo que todas as outras coincidem em ambos os conjuntos. Assim, temos uma situação do tipo $\Gamma'', (\neg P_n) \vdash A$ e $\Gamma'', P_n \vdash A$, do que podemos concluir que $\Gamma'' \vdash A$, ou seja, eliminamos a ocorrência da variável P_n e de sua negação. Fazendo o mesmo com todos os pares, obteremos afirmações do tipo $P_0^{L_j}, \ldots, P_{n-1}^{L_j} \vdash A$. Continuando este processo, agora com a variável P_{n-1}, esta também será eliminada das hipóteses. Indutivamente, eliminamos todas as hipóteses, seguindo este procedimento. $\square$

Observe-se que esta demonstração é plenamente realizável como um algoritmo que produz uma dedução (enorme) de uma fórmula a partir de um conjunto de hipóteses, conhecendo-se sua tabela-verdade. No próximo capítulo empreenderemos o estudo do cálculo de predicados, em que perderemos de vista este aspecto computacional. No capítulo sobre os teoremas de incompletude, veremos que essa perda é um problema intrínseco do cálculo de predicados e, portanto, não existe (em geral!) demonstração algorítmica dos análogo teorema da completude.

Capítulo 6

Lógica de Primeira Ordem

> *Para evitar que qualquer coisa intuitiva penetrasse aqui despercebida, tive que envidar todo o esforço para manter as cadeias de inferências livres de lacunas. Na tentativa de obedecer a essa exigência do modo mais estrito possível, percebi que a inadequação da linguagem era um obstáculo; não importava quão complicadas fossem as expressões que eu estava disposto a aceitar, estava cada vez menos capaz de atingir a precisão que eu requeria, conforme as relações tornavam-se mais e mais complexas. Essa deficiência levou-me à ideia desta ideografia.*
>
> Gottlob Frege, 1879.

> *Com essa notação toda proposição toma a forma e precisão que as equações desfrutam em álgebra, e de proposições assim escritas outras podem ser deduzidas, por um procedimento que se parece com a solução de equações algébricas.*
>
> Giuseppe Peano, 1889.

Começaremos com contextos matemáticos, dos quais abstrairemos uma linguagem formal. Esses contextos serão caracterizados como classes de *estruturas*, tendo algumas características em comum (por exemplo, quando trabalhamos com a *Teoria dos Grupos*, eles têm em comum o fato de possuírem uma operação binária [1] – a multiplicação; uma operação unária – a inversa; e um elemento distinguido – o elemento neutro da multiplicação). A coleção desses objetos que caracterizam as classes de estruturas será chamada de *assinatura* dessa classe. Em cima de cada assinatura, construiremos uma linguagem (alfabeto, termos e sentenças). Daremos uma semântica a essa linguagem, interpretando-a em cada estrutura da classe daquela assinatura (recuperando seu significado original). Com isto, introduziremos a noção de verdade (de Tarski), que estende a ideia das tabelas-verdade do cálculo proposicional. Introduziremos também um cálculo dedutivo que será correto (sintático respeita a semântica) e completo (o que for *verdadeiro* será dedutível).

6.1 Introdução

Relembrando que Bertrand Russell desenvolveu sua Teoria de Tipos para evitar os paradoxos que uma linguagem formal muito expressiva [2] apresentava, e que essa teoria dividia os objetos do discurso matemático em níveis, destacaram-se nos estudos posteriores os dois primeiros níveis: o nível zero (ou *ordem zero*), que consiste no que hoje chamamos de Cálculo Proposicional, e no nível 1 (ou *primeira ordem*) que seria o que hoje chamamos de Lógica (ou Cálculo de Predicados) de Primeira Ordem. Na verdade, são os únicos níveis em que o fenômeno da completude acontece, ou seja, todas as fórmulas que puderem ser deduzidas no sistema todo, já poderiam sê-lo usando-se apenas axiomas e deduções restritos à primeira ordem. Já vimos a completude do nível zero no capítulo anterior e veremos a do nível 1 neste capítulo. No próximo capítulo veremos que perderemos o aspecto algorítmico do Teorema da Completude - ou seja, não existe nem um algoritmo que decida (uniformemente) se uma fórmula seria *válida* (o análogo de tautologia).

[1] É mais elegante do que dizer *operação de duas variáveis.*

[2] Veja sobre Frege e o Paradoxo de Russell no Capítulo Histórico.

6.2 A Teoria da Verdade de Tarski

Alfred Tarski [3] preocupou-se desde cedo com o problema filosófico de definir o conceito de *verdade* para sentenças de uma dada linguagem. Em seu famoso artigo *O Conceito de Verdade nas Linguagens Formalizadas* [4] atacou pela primeira vez o problemas. Concluiu que era impossível definir verdade para as linguagens naturais [5], ficando com o caso das linguagens formalizadas da matemática.

Essencialmente, dividiu seu contexto em duas linguagens, uma formalizada (ou *linguagem objeto*), para a qual se deseja definitr verdade e, portanto, não pode conter nenhuma noção interna de verdade, e uma linguagem mais expressiva, chamada de metalinguagem, com os seguintes requisitos:

1. ela deve conter a linguagem objeto;

2. deve interpretar os símbolos lógicos da linguagem objeto;

3. deve conter um mínimo necessário de Teoria dos Conjuntos.

Reduziu o problema de definição de verdade para a linguagem objeto à noção de *satisfação*, que veremos na seção seguinte.

Apesar de ser uma teoria matematicamente útil, não é completamente aceita filosoficamente [6].

---

[3] Seu nome verdadeiro era Alfred Tajtelbaum. Nasceu em Varsóvia, na Polônia, em 14 de janeiro de 1901, de família judia. Em 1923, converteu-se ao catolicismo e mudou o sobrenome para Tarski - o anti-semitismo era muito forte na época. Foi considerado um dos maiores lógicos do século XX. Faleceu nos EUA, para onde emigrou com o início da Segunda Guerra Mundial, em 27 de outubro de 1983.

[4] Publicada em russo em 1933 e traduzida para o inglês em 1983.

[5] Devido à sua riqueza de expressão, que permitiria auto-referência e internalizar o conceito de verdade, ingredientes que produzem facilmente o paradoxo do mentiroso.

[6] Consulte a obra de Richard L. Kirkham, **Theories of Truth. A Critical Introduction**, The MIT Press, Cambridge, MA, EUA, 1992, especialmente os capítulos 5 e 6.

6.3 Estruturas e Linguagens Formais de Primeira Ordem

Estruturas matemáticas carregam consigo, em geral, elementos distinguidos (por exemplo, o zero, como elemento neutro da soma em $\mathbb{Z}$), operações (a soma e o produto em $\mathbb{Z}$) e relações (por exemplo, a ordem em um conjunto ordenado). É prática comum usarmos os mesmos símbolos (por exemplo, 0, 1, +, <, etc.) para indicar elementos distinguidos, operações e relações das várias estruturas dentro de uma classe (por exemplo, espaços vetoriais, aneis, corpos ordenados, etc.) Esse conjunto de símbolos será chamado de **assinatura** daquela classe de estruturas. Mais especificamente, uma assinatura é um conjunto $L = C \cup F \cup R$, sendo que C, F e R são conjuntos dois a dois disjuntos, $F = \bigcup_{n\geq 1} F^n$, $R = \bigcup_{n\geq 1} R^n$ e supomos que possamos distinguir se um dado elemento está em C, ou em algum F^n ou em um R^n (por exemplo, os elementos de C podem ser pares ordenados $(0, i)$, $i \in I$, os de F^n triplas ordenadas $(1, n, j)$ $j \in J$ e os de R^n triplas ordenadas $(2, n, k)$, $k \in K$).

Dada uma assinatura L, uma **estrutura** para L (ou L-estrutura) é uma quadrupla $\mathcal{M} = (M, C^M, F^M, R^M)$ em que M é um conjunto não vazio (o **domínio** da estrutura), C^M é uma aplicação de C em M (isto é, a cada símbolo de constante $c \in C$ associamos um elemento $c^M \in M$), F^M é uma associação dos símbolos de função $f \in F$ a funções $f^M : M^n \to M$ (sendo f n-ária) e R^M uma associação dos símbolos de relação $P \in R$ a relações (subconjuntos de M^n, sendo P n-ário) P^M em M.

Devido a um saudável [7] abuso de linguagem, denotaremos a estrutura $\mathcal{M}$ por M, seu conjunto subjacente, quando a estrutura estiver subentendida.

Um **morfismo** de L-estruturas é uma aplicação $\Phi : M \to N$ tal que se $c \in C$, $\Phi(c^M) = c^N$ [8], se $f \in F$ é n-ária, $\Phi(f^M(x_1, \ldots, x_n)) = f^N(\Phi(x_1), \ldots, \Phi(x_n))$, e se $P \in R$ é n-ária, então $(x_1, \ldots, x_n) \in P^M$ se, e só se, $(\Phi(x_1), \ldots, \Phi(x_n)) \in P^N$. Se Φ é bijetora, dizemos que é um **isomorfismo** (de L-estruturas).

Uma **linguagem de primeira ordem** consiste num alfabeto que contém os símbolos lógicos $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\exists$ e $\forall$, e também o da igualdade $=$ será considerado como símbolo lógico; um conjunto enumerável de símbolos de variáveis

[7] Antigamente usava-se o alfabeto gótico para denotar a estrutura: $\mathfrak{M} = (M, \ldots)$.

[8] Esta condição restringe a existência de morfismos - por exemplo, a inclusão do anel nulo $\{0\}$, em que $0 = 1$ em outro anel não nulo não será considerado como morfismo.

Var $= \{x_n : n \in \omega\}$; símbolos não lógicos são os de uma assinatura L; além disso a linguagem tem regras (gramaticais) de formação de expressões bem fundadas, ou fórmulas e sentenças.

Como o que muda de uma linguagem a outra é apenas a assinatura L, usaremos o símbolo L também para denotar a linguagem de primeira ordem assim obtida.

Exemplo 3 *A linguagem da teoria dos grupos contém os símbolos e de constante (para o elemento neutro) e o símbolo de função binária, para a operação do grupo.*

Exemplo 4 *A linguagem da teoria dos anéis contém os símbolos de constantes* 0 *e* 1*, e as operações binárias* $+$ *e* $\cdot$*, com as interpretações usuais.*

Exemplo 5 *A linguagem da teoria dos anéis ordenados contém os símbolos de constantes* 0 *e* 1*, e as operações binárias* $+$ *e* $\cdot$*, uma relação binária* $\leq$*, com as interpretações usuais. Pode também ser usado o símbolo de função unária* $-$ *para o oposto de um elemento.*

Para descrever as regras gramaticais, comecemos pelos **termos de** L (ou L-termos):

Somente serão considerados termos as sequências de símbolos s de L para as quais existe uma sequência finita $s_1, \ldots, s_m$ tal que s é o último elemento da sequência, s_m, e cada s_i deve satisfazer uma das condições abaixo:

- s_i é uma variável, ou
- um símbolo de constante, ou
- s_i é $f(s_{i_1}, \ldots, s_{i_n})$ sendo que f é um símbolo de função n-ária e i_1, ..., $i_n < i$ (isto é, já foram obtidos anteriormente).

Com isto também podemos definir a **complexidade do termo** s, $c(s)$, como o menor m tal que existe uma sequência como acima.

Agora podemos definir **fórmula de** L (ou L-fórmula).

Somente serão consideradas fórmulas as sequências de símbolos φ de L para as quais existe uma sequência finita $\phi_1, \ldots, \phi_m$ tal que φ é ϕ_m e cada ϕ_i deve satisfazer uma das condições abaixo:

- ϕ_i é $t_1 = t_2$ (ou mais pedantemente, "$= (t_1, t_2)$"), sendo que t_1 e t_2 são termos, ou
- $R(t_1, \ldots, t_n)$, sendo que R é símbolo relacional n-ário e $t_1, \ldots, t_n$ são termos, ou
- $\phi_j \wedge \phi_k$, ou $\phi_j \vee \phi_k$, ou $\neg\phi_j$, em que $j, k < i$, ou
- $\exists x \phi_k$ or $\forall x \phi_k$, sendo que x é uma variável e $k < i$; neste caso, a fórmula ϕ_k será chamada de *escopo* do quantificador $\forall x$ ou $\exists x$.

As fórmulas do tipo $t_1 = t_2$ e do tipo $R(t_1, \ldots, t_n)$ são chamadas de **fórmulas atômicas**.

Com isto também podemos definir a **complexidade da fórmula** φ como o menor m tal que existe uma sequência como acima.

Dada uma fórmula φ, definimos como **variáveis livres** as variáveis x que ocorram em φ e que não estejam no escopo de um quantificador $\exists x$ ou $\forall x$.

Mais especificamente, definimos por indução na complexidade de φ o conjunto das variáveis livres de φ, $VL(\varphi)$ como:

- se φ for atômica, $VL(\varphi)$ contém exatamente as variáveis que ocorrem nor termos de φ;
- se φ for $\neg\psi$, então $VL(\varphi) = VL(\psi)$;
- se φ for $\phi_1 \wedge \phi_2$ ou $\phi_1 \vee \phi_2$ então $VL(\varphi) = VL(\phi_1) \cup VL(\phi_2)$;
- por fim, se φ for $\exists x\, \psi$ ou $\forall x\, \psi$ então $VL(\varphi) = VL(\psi) \setminus \{x\}$. Neste caso, x é dita **variável ligada**.

Costuma-se escrever $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ quando $VL(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Uma fórmula φ é uma **sentença** se $VL(\varphi)$ for vazio.

Vamos definir agora a relação de **satisfação**, $\models$, que relaciona estruturas e fórmulas. Vamos definir esta relação por indução na complexidade das fórmulas. Dadas uma estrutura M, uma **atribuição de valores** $s : \mathrm{Var} \to M$ e uma fórmula φ, definimos $M \models \varphi[s]$ por etapas.

Primeiramente, definiremos **interpretação de termos** em M dada s, $t^M[s]$ ou apenas $s(t)$, como:

- se t é a constante c, $t^M[s] = c^M$;
- se t é uma variável x, $t^M[s] = s(x)$;
- se t é da forma $f(t_1, \ldots, t_n)$, $t^M[s] = f^M(t_1^M[s], \ldots, t_n[s])$.

Usaremos apenas a notação $s(t)$ no lugar de $t^M[s]$, reservando esta última quando for necessária.

Agora definiremos **interpretação das fórmulas** em M, isto é, a relação $M \models \varphi[s]$ (leia-se M satisfaz φ em s, ou que M é **modelo** de φ):

- se φ é atômica, $P(t_1, \ldots, t_n)$ (incluindo o caso $t_1 = t_2$), $M \models \varphi[s]$ se $(s(t_1), \ldots, s(t_n)) \in P^M$;
- se φ é $\phi_1 \wedge \phi_2$, $M \models \varphi[s]$ se $M \models \phi_1[s]$ e $M \models \phi_2[s]$;
- se φ é $\phi_1 \vee \phi_2$, $M \models \varphi[s]$ se $M \models \phi_1[s]$ ou $M \models \phi_2[s]$;
- se φ é $\neg\phi$, $M \models \varphi[s]$ se não ocorrer que $M \models \phi[s]$ (ou $M \not\models \phi[s]$);
- se φ é $\exists x\phi$, $M \models \varphi[s]$ se existir $a \in M$ tal que se $s' : \mathrm{Var} \to M$ satisfaz $s'(x) = a$ e $s'(y) = s(y)$ para todas as outras variáveis, então $M \models \phi[s']$;
- se φ é $\forall x\phi$, $M \models \varphi[s]$ se para cada $a \in M$, se $s' : \mathrm{Var} \to M$ satisfaz $s'(x) = a$ e $s'(y) = s(y)$ para todas as outras variáveis, então $M \models \phi[s']$

Pelo exercício 20, a relação $M \models \varphi[s]$ só depende das variáveis livres de φ. Neste caso, usando a notação $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ descrita acima, e sendo $a_i = s(x_i)$, podemos escrever a relação $M \models \varphi[s]$ na forma $M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$. No caso das sentenças, denotaremos $M \models \varphi$, omitindo a atribuição de valores s.

6.4 Completude e Compacidade

Uma vez que tenhamos dado uma semântica (significado, ou interpretação na metalinguagem), vamos estender a noção de dedução formal do cálculo proposicional para incorporar o tratamento dos novos símbolos introduzidos.

6.4.1 Dedução formal

Agora trabalharemos (quase) totalmente em L, descrevendo o que é uma demonstração formal em L sem fazer apelo a estruturas. Escolheremos um conjunto de fórmulas para que constituam os axiomas e descreveremos as regras de inferência usadas em demonstrações formais.

Para isto, precisamos olhar mais de perto as fórmulas de L e separar o que é puramente proposicional de quantificação.

Dada uma fórmula φ, o conjunto das **subfórmulas proposicionais** de φ é o conjunto $SFP(\varphi)$ definido por indução:

- se φ é atômica ou da forma $\exists x\phi$ ou $\forall x\phi$, $SFP(\varphi) = \{\varphi\}$ (neste caso chamaremos φ de **fórmula proposicional atômica**);
- se φ é $\phi_1 \wedge \phi_2$, ou $\phi_1 \vee \phi_2$, então $SFP(\varphi) = SFP(\phi_1) \cup SFP(\phi_2)$;
- se φ é $\neg\phi$, $SFP(\varphi) = SFP(\phi) \cup \{\neg\phi\}$.

Podemos reconstruir uma fórmula φ a partir de suas subfórmulas proposicionais atômicas usando os conectivos proposicionais $\wedge$, $\vee$ e $\neg$. Definimos, para simplificar a notação, $A \rightarrow B$ como $\neg A \vee B$ e $A \leftrightarrow B$ como $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$. Observe que "$\wedge$" e "$\vee$" podem ser definidos a partir de "$\rightarrow$" e "$\neg$" (como exercício, verifique isto).

Atribuindo-se valores V ou F (verdadeiro ou falso) às sufórmulas atômicas de φ, fazemos a tabela verdade de φ da maneira usual (como exercício, faça isto), determinamos se φ é ou não **taultologia proposicional**. No raciocínio matemático, as tautologias proposicionais são usadas em qualquer demonstração.

Por uma questão técnica que ficará clara adiante tomaremos não as tautologias mas as várias generalizações delas. Uma **generalização** de uma fórmula φ é a fórmula $\forall x_{i_1} \ldots \forall x_{i_n} \varphi$, sendo que $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$ é um conjunto (possivelmente vazio) de variáveis, podendo haver até repetições, ou variáveis que nem ocorram em φ.

Por isto, definimos o primeiro esquema de axiomas:

Axiomas I: Todas as generalizações de cada tautologia proposicional.

Passemos agora ao tratamento da quantificação.

O primeiro problema que encontramos ocorre quando queremos tomar um caso particular de uma fórmula da forma $\forall x\phi$, tirando o quantificador $\forall x$ e trocando x em ϕ por um termo t. Para evitar besteiras do tipo φ é $\forall x\exists y(x \neq y)$, t é a variável y, e a substituição descuidada ficaria $\exists y(y \neq y)$, precisamos definir corretamente este processo.

A **substituição livre** da variável x pelo termo t em ϕ, $S_x^t\phi$ ou $\phi|_{x=t}$, é definida por indução na complexidade de ϕ:

- se ϕ é atômica, $\phi|_{x=t}$ é obtida de ϕ pela substituição de toda ocorrência de x por t;
- se ϕ é $\phi_1 \wedge \phi_2$, $\phi|_{x=t}$ é $\phi_1|_{x=t} \wedge \phi_2|_{x=t}$;
- se ϕ é $\phi_1 \vee \phi_2$, $\phi|_{x=t}$ é $\phi_1|_{x=t} \vee \phi_2|_{x=t}$;
- se ϕ é $\exists y\psi$ (ou $\forall y\psi$) e nenhuma variável em t é y, então $\phi|_{x=t}$ é $\exists y(\psi|_{x=t})$ (ou, respectivamente, $\forall y(\psi|_{x=t})$);
- se ϕ é $\exists y\psi$ (ou $\forall y\psi$), mas y ocorre em t, então $\phi|_{x=t}$ é a prórpia ϕ.

Com isto introduzimos o segundo esquema de axiomas:

Axiomas II: Para cada fórmula ϕ e cada termo t, as generalizações das fórmulas $\forall x\phi \to (\phi|_{x=t})$ e $(\phi|_{x=t}) \to \exists x\phi$.

Os próximos tratam de como distribuir quantificação em implicações.

Axiomas III: Para cada par de fórmulas ϕ e ψ, todas as generalizações de $\forall x(\phi \to \psi) \to (\forall x\phi \to \forall x\psi)$, $(\exists x\phi \wedge \exists x\psi) \to \exists x(\phi \wedge \psi)$.

Axiomas IV: Para cada par de fórmulas ϕ e ψ, e variável x que não seja livre em ϕ, todas as generalizações de $\forall x(\phi \to \psi) \to (\phi \to \forall x\psi)$, $(\phi \wedge \exists x\psi) \to \exists x(\phi \wedge \psi)$.

Axiomas V: Para cada fórmula ϕ e variável x, todas as generalizações de $\forall x\phi \to \neg(\exists x\neg\phi)$ e de $\neg(\exists x\neg\phi) \to \forall x\phi$.

E, por fim, os axiomas da igualdade.

Axiomas VI: As generalizações de $x = y \to y = x$, $x = x$ e, para cada símbolo de relação n-ária P e termos $t_1, \ldots, t_n$, as generalizações de

$$P(t_1, \ldots, t_n) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{k} x_i = y_i\right) \to P(t'_1, \ldots, t'_n),$$

sendo que t'_i é obtido de t_i por zero ou mais substituições de ocorrências das variáveis x_j por y_j.

Agora podemos definir **dedução formal** de uma fórmula φ a partir de um conjunto de fórmulas Γ (as "hipóteses") tal que $VL(\Gamma) = \bigcup\{VL(\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ seja finito, é uma sequência finita de fórmulas $\phi_1, \ldots, \phi_n$ tal que ϕ_n é φ e cada ϕ_i satisfaz um dos quesitos abaixo:

- ϕ_i é axioma, ou
- $\phi_i \in \Gamma$ (cita uma hipótese), ou
- (*Modus Ponens* ou *Destacamento*) existem $j, k < i$ tais que ϕ_k é $\phi_j \to \phi_i$, ou
- (*Generalização*) existe $j < i$ e variável $x \notin VL(\Gamma)$ e ϕ_i é a fórmula $\forall x \phi_j$.

Neste caso dizemos que φ é **dedutível a partir de** Γ e escrevemos $\Gamma \vdash \varphi$. Se Γ é vazio, dizemos apenas que φ é **dedutível**, e escrevemos $\vdash \varphi$.

A regra da generalização nada mais é do que o conhecido argumento de que "*como x é arbitrário, (uma dada propriedade) vale para todo x*", e, na verdade, pode ser derivada, ou seja:

Lema 6.4.1 *Se $x \notin VL(\Gamma)$ e $\Gamma \vdash \psi$, então existe dedução de $\forall x\, \psi$ a partir das hipóteses de Γ em que não se usa a regra de generalização, mas apenas a regra do Modus Ponens.*

Demonstração: Sem perda de generalidade (ou por indução na demonstração), podemos supor que $\psi_1, \ldots, \psi_n$ é dedução de ψ a partir de Γ em que não se usa a regra de generalização. Vamos obter desta uma dedução de $\forall x\, \psi$ sem usar a regra de generalização, por indução no tamanho da demonstração. Na verdade, a hipótese de indução é que $\Gamma \vdash \forall x\, \psi_j$, para todo $j < i$, $1 \leq i \leq n$ (sendo que o passo inicial a hipótese é vazia).

Dividimos em três casos:

- se ψ_i é axioma, então $\forall x\, \psi_i$ também é axioma e, portanto, $\Gamma \vdash \forall x\, \psi_i$;
- se $\psi_i \in \Gamma$, então $x \notin VL(\psi_i)$ e temos a seguinte dedução:

1. ψ_i (listamos uma hipótese de Γ)
2. $\forall x(\psi_i \to \psi_i)$ (é axioma proposicional)
3. $\forall x(\psi_i \to \psi_i) \to (\psi_i \to \forall x\, \psi_i)$ (uma forma do axioma IV)
4. $(\psi_i \to \forall x\, \psi_i)$ (destacamento de 2 e 3)
5. $\forall x\, \psi_i$ (destacamento de 1 e 4)

- se ψ_i foi obtida por destacamento, existem $j, k < i$, tais que ψ_k é a fórmula $(\psi_j \to \psi_i)$ e, por hipótese de indução, temos que $\Gamma \vdash \forall x \psi_j$ e $\Gamma \vdash \forall x(\psi_j \to \psi_i)$; assim, temos a seguinte dedução, agregada ás deduções da hipótese:

  1. $\forall x(\psi_j \to \psi_i) \to (\forall x \psi_j \to \forall x \psi_i)$ uma forma do axioma III)
  2. $(\forall x \psi_j \to \forall x \psi_i)$ (destacamento de 1 com $\forall x(\psi_j \to \psi_i)$, obtida anteriormente)
  3. $\forall x \psi_i$ (destacamento de 2 com $\forall x \psi_j$, obtida anteriormente).

Com isto terminamos a demonstração. $\square$

Uma consequência importante e útil disso é o seguinte resultado.

Teorema 6.4.1 *Se o símbolo de constante c não ocorre em nenhuma fórmula de Γ, $x \notin VL(\Gamma)$ e $\Gamma \vdash \psi|_{x=c}$, então $\Gamma \vdash \forall x\, \psi$.*

Demonstração: Denotemos $\theta|_{c=x}$ a operação de trocar todas as ocorrências de c pela variável x na fórmula θ. Observemos que se θ é um axioma, então $\theta|_{c=x}$ também é axioma (verifique caso a caso); se $\theta \in \Gamma$, então $\theta|_{c=x}$ é a própria θ. Observemos também que $(\theta \to \eta)|_{c=x}$ é a fórmula $(\theta|_{c=x} \to \eta|_{c=x}$.

Assim, se $\psi_1, \ldots, \psi_n$ é dedução de $\psi|_{x=c}$, então $\psi_1|_{c=x}, \ldots, \psi_n|_{c=x}$ é uma dedução de $\psi|_{c=x}$ e, como $x \notin VL(\Gamma)$, $\Gamma \vdash \forall x \psi$. $\square$

O próximo teorema é muito importante, pois diz que a implicação codifica de certa maneira a relação de dedução, $\vdash$. Além disso será muito útil em aplicações.

Teorema 6.4.2 ***(Teorema da Dedução)*** *$\Gamma \vdash \phi \to \psi$ se, e só se, $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$.*

Demonstração: Podemos supor que a regra de generalização não foi usada para mostrar que $\Gamma \vdash \phi \to \psi$. Assim, basta acrescentar as fórmulas ϕ (hipótese de $\Gamma \cup \{\psi\}$) e ψ (destacamento) a tal dedução, oara mostrarmos que $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$.

Para a recíproca, suponha agora que $\psi_1, \ldots, \psi_n$ seja dedução de ψ a partir de Γ e ϕ, em que não se usa a regra de generalização. Vamos obter por indução na demonstração que $\Gamma \vdash \phi \to \psi_j$, $1 \leq j \leq n$:

- se ψ_i é axioma ou elemento de Γ, a seguinte dedução prova que $\Gamma \vdash \phi \to \psi_i$:

  1. ψ_i (axioma ou hipótese de Γ)
  2. $\psi_i \to (\phi \to \psi_i)$ (axioma I)
  3. $(\phi \to \psi_i)$ (destacamento);

- se ψ_i foi obtida por destacamento de ψ_j e ψ_k, $j, k < i$, digamos que ψ_k seja a fórmula $(\psi_j \to \psi_i)$, por hipótese de indução, temos que $\Gamma \vdash \phi \to \psi_j$ e $\Gamma \vdash \phi \to \psi_k$; agregamos e essas deduções as seguintes fórmulas:

  1. $(\phi \to (\psi_j \to \psi_i)) \to ((\phi \to \psi_j) \to (\phi \to \psi_i))$ (axioma I)
  2. $(\phi \to \psi_j) \to (\phi \to \psi_i)$ (destacamento de 1 com $(\phi \to (\psi_j \to \psi_i))$, obtida anteriormente)
  3. $(\phi \to \psi_i)$ (destacamento de 2 com $(\phi \to \psi_j)$, também obtida anteriormente).

Com isso fica provado o teorema. $\square$

Dizemos que o conjunto Γ é **consistente** se não existir fórmula ϕ tal que $\Gamma \vdash \phi \wedge \neg\phi$.

Teorema 6.4.3 $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ *é consistente se, e só se,* $\Gamma \nvdash \phi$.

Demonstração: Se $\Gamma \vdash \phi$ então $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash \phi \wedge \neg\phi$.

Se $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ não é consistente, seja ψ tal que $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash \psi \wedge \neg\psi$. Então $\Gamma \vdash \neg\phi \to \psi \wedge \neg\psi$. Como $(\neg\phi \to \psi \wedge \neg\psi) \to \phi$ é tautologia, $\Gamma \vdash \phi$. $\square$

6.4.2 Correção, Completude e Compacidade

Dizemos que φ é **consequência semântica** do conjunto de fórmulas Γ (com $VL(\Gamma)$ finito), e denotamos $\Gamma \models \varphi$, se para toda estrutura M e toda atribuição de valores $s : \mathrm{Var} \to M$, se $M \models \Gamma[s]$ (isto é, se $M \models \gamma[s]$, para cada $\gamma \in \Gamma$), então $M \models \varphi[s]$.

Teorema 6.4.4 ***(Teorema da Correção)*** *Se* $\Gamma \vdash \phi$ *então* $\Gamma \models \phi$.

Demonstração: Seja $\phi_1, \ldots, \phi_n$ uma dedução de ϕ a partir de Γ, em que não foi usada a regra de generalização. Vamos mostrar por indução no comprimento da dedução que $\Gamma \models \phi_i$. Seja M uma estrutura e s atribuição de valores, e suponha que $M \models \Gamma[s]$. Se ϕ_i é axioma ou pertence a Γ então trivialmente $\Gamma \models \phi_i$. Se foi obtida por modus ponens, de ϕ_j e ϕ_k com $j, k < i$ então pela hipótese de indução vemos que $M \models \phi_i[s]$, e portanto $\Gamma \models \phi_i$. $\square$

A recíproca deste resultado é bem mais trabalhosa e é o chamado Teorema da Completude.

Teorema 6.4.5 ***(Teorema da Completude I)*** *Se* $\Gamma \models \phi$ *então* $\Gamma \vdash \phi$.

Para provarmos este teorema, provaremos um resultado equivalente.

Teorema 6.4.6 *São equivalentes:*

1. *Se* $\Gamma \models \phi$ *então* $\Gamma \vdash \phi$.
2. *Se* Γ *é consistente então existe estrutura* M *e atribuição de valores* s *tais que* $M \models \Gamma[s]$. *Neste caso diremos que* Γ ***tem modelo*** *ou que* M, s ***é modelo*** *de* Γ.

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2): Suponha (1) e que Γ não tenha modelo. Então para qualquer fórmula ϕ, a condição $\Gamma \models \phi$ é vaziamente satisfeita. Por (1), $\Gamma \models \phi$. Em particular se ϕ é $\neg\psi \wedge \psi$. Portanto Γ não é consistente.

(2) $\Rightarrow$ (1): Suponha agora (2) e que $\Gamma \not\vdash \phi$. Então $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ é consistente e portanto tem modelo M, s. Mas $M \not\models \phi[s]$ e isto implica que $\Gamma \not\models \phi$. $\square$

Provemos, então este enunciado. O método, introduzido por Leon Henkin em 1949, difere daquele usado originalmente por Kurt Gödel e chama-se o Método das Constantes e mostrou-se bastante útil para a construção de modelos.

Teorema 6.4.7 ***(Teorema da Completude II)*** *Se Γ é consistente então existe estrutura M e atribuição de valores s tais que $M \models \Gamma[s]$.*

Demonstração: Provaremos o caso em que a assinatura L é finita ou enumerável e indicaremos nos exercícios como tratar o caso geral (veja o exercício 23).

Introduzindo novas constantes, se necessário, podemos supor que Γ é um conjunto de L-sentenças.

Seja $D = \{d_n : n < \omega\}$ um conjunto (de novas constantes) disjunto de L e $L(D) = L \cup D$. Enumere o conjunto de todas as $L(D)$-sentenças, $\{\phi_n : n < \omega\}$. Construiremos uma sequência Γ_n de conjuntos consistentes de $L(D)$-sentenças (juntando uma quantidade finita de $L(D)$-sentenças a Γ_0) da seguinte forma:

- seja $\Gamma_0 = \Gamma$;
- suponha construído Γ_n; se $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ for inconsistente, então $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$;
- suponha construído Γ_n; se $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ for consistente e ϕ_n não for existencial (isto é, ϕ_n não é da forma $\exists x\theta$), então $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\phi_n\}$;
- suponha construído Γ_n; se $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ for consistente e ϕ_n for da forma $\exists x\theta$, seja $j_n = \min\{j < \omega : d_j$ não ocorre em nenhuma fórmula de $\Gamma_n\}$ e definimos $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\phi_n, \theta|_{x=d_{jn}}\}$.

Neste último caso (ϕ_n é $\exists x\theta$), como $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ é consistente, se $\Gamma_n \cup \{\phi_n, \theta|_{x=d_{jn}}\}$ fosse inconsistente, $\Gamma_n \cup \{\phi_n\} \vdash \neg\theta|_{x=d_{jn}}$; como d_{jn} não ocorre em $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$, temos que $\Gamma_n \cup \{\phi_n\} \vdash \forall x\theta$ (pelo Teorema 6.4.1) e, portanto, $\Gamma_n \cup \{\phi_n\} \vdash \neg\phi_n$, contradizendo a conssistência de $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$.

Seja $\Gamma_\infty = \bigcup_{n<\omega} \Gamma_n$. Então Γ_∞ é consistente e, para toda $L(D)$-sentença ψ, se $\psi \notin \Gamma_\infty$, então $\neg\psi \in \Gamma_\infty$, pois, se ambas estivessem fora de Γ_∞, não teriam entrado na sua construção. Suponhamos que ψ seja ϕ_m e $\neg\psi$ seja ϕ_n. Podemos supor que $m < n$. Isto significa que $\Gamma_m \cup \{\phi_m\}$ e $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ seriam ambos inconsistentes. Da´
i, decorre que $\Gamma_m \vdash \neg\phi_m$ e, portanto $\Gamma_n \vdash \neg\phi_m$, ou seja, $\Gamma_n \vdash \phi_n$. Como $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ também seria inconsistente, $\Gamma_n \vdash \neg\phi_n$, contradição à consistência de Γ_n.

Definimos a relação $d \sim d'$ em D se a fórmula $(d = d')$ está em Γ_∞. Esta é uma relação de equivalência, pois os axiomas da igualdade estão em Γ_∞. Seja $[d]$ a classe de $d \in D$ e M o conjunto dessas classes.

Vamos interpretar $L(D)$ no conjunto M:

- se $d \in D$, $d^M = [d]$;
- se $c \in C$ é símbolo de constante de L, $c^M = [d]$, se a fórmula $(c = d)$ está em Γ_∞; como $\exists x(c = x)$ está em Γ_∞, pelo menos uma das fórmulas do tipo $(c = d)$ está em Γ_∞;
- se $f \in L$ é símbolo de função n-ária, definimos $f^M([d_{i_1}], \ldots, [d_{i_n}]) = [d]$, se a fórmula $f(d_{i_1}, \ldots, d_{i_n}) = d$ estiver em Γ_∞;
- se $P \in L$ for símbolo de relação n-ária, definimos P^M por $([d_{i_1}], \ldots, [d_{i_n}]) \in P^M$ se, e só se, a fórmula $P(d_{i_1}, \ldots, d_{i_n})$ estiver em Γ_∞.

Afirmamos que $M \models \Gamma_\infty$. Pelo fato dos axiomas da igualdade estarem em Γ_∞ (em alguma forma), as sentenças atômicas de Γ_∞ são satisfeitas em M. Por indução na complexidade das fórmulas de Γ_∞, obtemos que $M \models \Gamma_\infty$ (veja o exercício 22). $\square$

Como corolário deste teorema, temos talvez o resultado mais importante da Teoria dos Modelos.

Teorema 6.4.8 ***(Compacidade)*** *Se Γ é um conjunto de sentenças e cada $\Gamma' \subset \Gamma$ finito tem modelo, então Γ tem modelo.* $\square$

Este resultado tem este nome, pois admite uma interpretação topológica (veja o exercício 24).

6.4.3 Comentários sobre o Aspecto Computacional

Na Teoria dos Conjuntos, podemos desenvolver a Teoria das Funções Recursivas [9], considerada como o contexto natural dos problemas computacionais (ou construtivos), usando todos os axiomas, com a exceção do Axioma da

[9] Veja o próximo capítulo.

Escolha. O conjunto de tais axiomas (sem o da escolha) é conhecido pela sigla [10] ZF.

Seja TC o enunciado do Teorema da Compacidade (que pode ser formalizado na linguagem de ZF). Leon Henkin demonstrou [11] que, supondo ZF, TC é equivalente ao chamado TIP (Teorema do Ideal Primo) [12], um resultado que afirma a existência de um determinado conjunto em certas situações. Posteriormente, A. R. D. Mathias demonstrou [13] que o TIP não é demonstrável e nem refutável, assumindo ZF e que esta teoria é consistente. Assim sendo, não é possível demonstrar o Teorema da Compacidade, em toda sua generalidade, de modo algorítmico. Na verdade, Alonzo Church [14] demonstrou que o problema geral de decidir algoritmicamente se uma dada fórmula A é dedutível de um conjunto de hipóteses Γ é insolúvel, ou seja, não temos como decidir se uma fórmula A é válida, por exemplo. No entanto, para alguns conjuntos Γ, esse problema é solúvel, como, por exemplo, se Γ for a Teoria dos Corpos Algebricamente Fechado [15]

6.5 Omissão de Tipos

O método das constantes permite provar um teorema útil na classificação de alguns modelos, que é o Teorema da Omissão de Tipos.

Um n-tipo (ou simplesmente tipo) é um conjunto maximal consistente $\Gamma = \Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ de L-fórmulas, cujas variáveis livres (se houver) estão contidas no conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$, para $n \geq 0$ (no caso $n = 0$, não há fórmulas

[10] Tirada das iniciais dos sobrenomes de Ernst Zermelo e de Abraham A. Fraenkel, que desenvolveram tal teoria - muito embora a forma usada hoje em dia é a de Thoralf Skolem. Consultem a obra *From Frege to Gödel*, de Jan van Heijenoort, páginas 290 a 301.

[11] Em *Mathematical Theorems Equivalent to the Prime Ideal Theorem for Boolean Algebras*, Bulletin of the American Mathematical Society, 60 (1954), p. 388.

[12] Veja este e outros resultados conexos no livro de Thomas J. Jech, *The Axioma of Choice*, (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 75), North-Holland Publishing Company, Amsterdã, 1973, principalmenteseções 2.3 e 7.2.

[13] Em *The order extension principle.* **Axiomatic Set Theory** (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIII, Part II, Univ. California, Los Angeles, Calif., 1967), pp. 179-183. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1974.

[14] Em *A Note on the Entscheidungsproblem*, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 1, No. 1, pp. 40-41.

[15] Demonstrado por Alfred Tarski, em **A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry**. RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1948.

com variáveis livres, mas apenas sentenças). Sejam $S_n(L)$ os conjuntos do todos os n-tipos de L-fórmulas, $n \geq 0$. Se a assinatura for conhecida no contexto em que usamos $S_n(L)$, poderemos omiti-la da notação, escrevendo apenas S_n . Se $T \in S_0(L)$ é dada, denotaremos $S_n(T) = \{\Gamma \in S_n(L) : T \subseteq \Gamma\}$.

Sejam $T \in S_0(L)$ e $M \models T$. Dizemos que M realiza o tipo $\Gamma \in S_n(T)$ se existe $\bar{a} \in M^n$, tal que $M \models \varphi(\bar{a})$, para toda $\varphi \in \Gamma$. Caso contrário, dizemos que M omite Γ.

Lema 6.5.1 *Dados $M \models T$ e $\Gamma \in S_n(T)$, então cada $\Gamma \in S_n(T)$ é finitamente satisfatível em M, ou seja, para cada parte finita $\Gamma_0 \subset \Gamma$, existe $\bar{a} \in M^n$, tal que $M \models \Gamma_0(\bar{a})$.*

Demonstração: Como Γ é consistente e contém T, dado $\Gamma_0 \subset \Gamma$ finito, definindo $\varphi = \bigwedge \Gamma_0$ (a conjunção das fórmulas de Γ_0), $T \cup \{\varphi\}$ é consistente e, portanto, $T \cup \{\exists x_1 \ldots \exists x_n \, \varphi\}$ também é consistente. Como $M \models T$ e T é maximal consistente, $M \models \exists x_1 \ldots \exists x_n \, \varphi$. Seja, então, $\bar{a} \in M^n$, tal que $M \models \varphi(\bar{a})$. $\square$

Lema 6.5.2 *Dados T e $\Gamma \in S_n(T)$, existe $M \models T$ que realiza Γ. E mais ainda, existe $M \models T$ que realiza todos os n-tipos de $S_n(T)$, para todo $n \geq 1$.*

Demonstração: Para cada $n \geq 1$ e cada $\Gamma \in S_n(T)$ seja $C_\Gamma = \{c_1^\Gamma, \ldots, c_n^\Gamma\}$ um novo conjunto de símbolos de constantes e sejam Γ^* os conjuntos de fórmulas obtidos de Γ pela substituição de cada variável livre x_j pelo símbolo c_j^Γ, $1 \leq j \leq n$. Então $\bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{\Gamma \in S_n(T)} \Gamma^*$ é um conjunto consistente de sentenças na linguagem extendida pelas novas constantes (por compacidade) e, portanto tem modelo. As interpretações das novas constantes realizarão os diversos tipos. $\square$

Dados $T \in S_0$ e $\Gamma \in S_n(T)$, dizemos que a fórmula φ isola Γ, ou que Γ é isolado por φ, se $T \vdash \varphi \to \psi$. Dizemos que Γ é tipo não isolado.

Lema 6.5.3 *Se $\Gamma \in S_n(T)$ é isolado (por φ), então todo $M \models T$ realiza Γ.*

Demonstração: Exercício. $\square$

Para tipos não isolados, temos o seguinte teorema (que pode ser generalizado: veja o exercício 25 adiante).

Teorema 6.5.1 ***(Omissão de Tipos)*** *Suponha que a assinatura L é finita ou (infinita) enumerável. Dada T e dado $\Gamma \in S_n(T)$, um tipo não isolado, existe $M \models T$ que omite Γ.*

Demonstração: Seja $D = \{d_j : j \in \mathbb{N}\}$ um conjunto de novas constantes e $L(D) = L \cup D$ a assinatura L estendida com D. Enumere as $L(D)$-sentenças $\{\psi_j : j \in \mathbb{N}\}$ e enumere as n-uplas de D, $D^n = \{\bar{d}_j : j \in \mathbb{N}\}$.

Construiremos um conjunto maximal consistente Γ_∞, como no caso do Teorema da Completude, mas imporemos mais uma cláusula para garantir que o modelo construído não realize o tipo Γ.

Inicialmente façamos $\Gamma_0 = T$. Por indução em n construiremos um conjunto de $L(D)$-fórmulas Γ_{n+1} contendo Γ_n, que seja consistente e satisfazendo os quesitos:

- se $\Gamma_n \cup \{\psi_n\}$ for inconsistente, $\Gamma'_n = \Gamma_n$;
- se $\Gamma_n \cup \{\psi_n\}$ for consistente e ϕ_n não for da forma $\exists x \psi$, então $\Gamma'_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\psi_n\}$;
- se $\Gamma_n \cup \{\psi_n\}$ for consistente e ϕ_n for da forma $\exists x \theta$, seja $d \in D$ a primeira constante na enumeração dada que não ocorre em nenhuma fórmula de $\Gamma_n \cup \{\psi_n\}$, e façamos $\Gamma'_n = \Gamma_n \cup \{\psi_n, \theta|_{x=d}\}$. Este conjunto é consistente, pois senão $\Gamma_n \cup \{\psi_n\} \vdash \neg\psi|_{x=c}$ e, portanto, $\Gamma_n \cup \{\psi_n\} \vdash \forall x(\neg\theta)$ o que implica que $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ seria inconsistente, uma contradição.
- Uma vez obtido Γ'_n, temos que impor a não realização do tipo Γ, ou seja, imporemos que a n-upla $\bar{d}_n$ não realize o tipo. Como o tipo é não isolado, existe $\sigma \in \Gamma$, tal que $\Gamma'_n \cup \{\neg\sigma(\bar{d}_n)\}$ é consistente, pois senão $\Gamma'_n \vdash \theta(\bar{d}_n)$, para toda $\theta \in \Gamma$, e, neste caso, se φ for a conjunção de todas as fórmulas de $\Gamma' \setminus T$, retirando as constantes novas e colocando as variáveis livres correspondentes, (ou se for uma fórmula de T se $\Gamma' \setminus T = \varnothing$), então, pelo teorema da dedução, $T \vdash \varphi \to \theta$, para toda $\theta \in \Gamma$, ou seja, φ isolaria Γ, uma contradição. Assim, definimos $\Gamma_{n+1} = \Gamma'_n \cup \{\sigma(\bar{d}_n)\}$.

Fazendo $\Gamma_\infty = \bigcup_n \Gamma_n$, e construindo o modelo M pelo método das constantes, ele omitirá Γ, devido às condições que impõem que nenhuma n-upla de D realizaria Γ. $\square$

Vamos fazer algumas aplicações desse resultado importante. Na verdade, usaremos sua versão generalizada, que permite omitir uma sequência Γ_j, $j \in \mathbb{N}$, de n_j-tipos (veja o exercício 25).

Primeiramente, chamamos uma teoria $T \in S_0(L)$ de **ω-categórica** se T tem modelos enumeráveis e todos esses modelos são isomorfos entre si.

Lema 6.5.4 *Suponha que a assinatura L é finita ou enumerável e que existam infinitos tipos distintos em $S_n(T)$. Então existe um tipo $\Gamma_\infty in S_n(T)$ não isolado.*

Demonstração: Suponha que todos os tipos de $S_n(T)$ sejam isolados. Como L é finita ou enumerável, existem no máximo uma quantidade enumeaável de tipos em $S_n(T)$, Γ_j, $j \in \mathbb{N}$. Suponha que $\varphi_j(x_1, \ldots, x_n)$ isole o tipo Γ_j, ou seja, $T \cup \{\varphi\}$ é consistente e $T \vdash \varphi_j \to \psi$, para toda $\psi \in \Gamma_j$. Em particular, como Γ_j é maximal consistente, $\varphi_i \in \Gamma_j$. Podemos ainda afirmar que se $k \neq j$, então φ_j não é consistente com Γ_k, pois existe $\psi \in \Gamma_j$, tal que $\neg\psi \in \Gamma_k$. Seja $\Delta = \{\neg\varphi_j : j \in \mathbb{N}\}$. Então Δ é consistente com T, pois, senão, $T \cup \{\neg\varphi_0, \ldots, \neg\varphi_N\}$ seria inconsistente, para algum $N \in \mathbb{N}$, $N > 0$, por compacidade, ou seja, $T \cup \{\bigwedge_{j=0}^{N} \neg\varphi_j\}$ seria inconsistente, o que implicaria que $T \vdash \neg \bigwedge_{j=0}^{N} \neg\varphi_j$, ou seja, $T \vdash \bigwedge_{j=0} N\varphi_j$. Isso implica, em particular, que $\bigwedge_{j=0} N\varphi_j \in \Gamma_{N+1}$ e, portanto, $\varphi_k \in \Gamma_{N+1}$, para algum K, $0 \leq k \leq N$ pois o conjunto Γ_{N+1} é maximal consistente e contém T. Mas isto contradiz o fato observado acima, que se $k \neq j$, então φ_j não é consistente com Γ_k. Ou seja, qualquer lista enumerável de tipos isolados não pode esgotar todo $S_n(T)$ e, portanto, existe um tipo não isolado em $S_n(T)$. $\square$

Na verdade, a hipótese de que L seja finita ou enumerável não é essencial nesse lema. Basta que $S_n(T)$ seja infinito para que contenha um tipo não isolado (faça isso como exercício).

Lema 6.5.5 *Se $S_n(T)$ for finito, então todos os seus n-tipos são isolados.*

Demonstração: Se houver um único tipo $\Gamma \in S_n(T)$, então $T \vdash \psi$, para toda $\psi \in \Gamma$ e, portanto $T \vdash \bigwedge_{j=1} n(x_j = x_j) \to \psi$, para toda $\psi \in \Gamma$. Se houver mais de um n-tipo, digamos $S_n(T) = \{\Gamma_0, \ldots, \Gamma_N\}$, para algum $N > 0$, existiriam fórmulas $\psi_j \in \Gamma_j \setminus \bigcup_{j \neq i,\ 0 \leq i \leq N} \Gamma_i$. Tais fórmulas isolam seus tipos. $\square$

Teorema 6.5.2 *Seja L finita ou enumerável e $T \in S_0(L)$ uma teoria que tem modelos infinitos. Então T é ω-categórica se, e somente se, $S_n(T)$ é finito, para cada $n > 0$.*

Demonstração: Se algum $S_n(T)$ fosse infinito, teríamos pelo menos dois modelos enumeráveis de T, M_1 e M_2 e um tipo não isolado $\Gamma \in S_n(T)$ omitido em M_1 e realizado em M_2. Tais modelos não podem ser isomorfos, pois se fossem, a (pré-)imagem de n-upla que realizasse o tipo em M_2 necessariamente teria que realizá-lo em M_1.

Por outro lado, se todos os $S_n(T)$ fossem finitos, todos os tipos seriam isolados e, se M_1 e M_2 são dois modelos enumeráveis de T, ambos teriam que realizar todos os tipos sobre T. Enumerando-os, $M_1 = \{a_j : j \in \mathbb{N}\}$ e $M_2 = \{b_j : j \in \mathbb{N}\}$, construímos um isomorfismo entre os dois modelos pelos método de vai-e-vem:

- seja $j_0 = \min\{j \in \mathbb{N} : b_j \text{ realiza } \mathrm{tp}^{M_1}(a_0)\}$, sendo que $\mathrm{tp}^{M_1}(a)$ é o tipo de a em M_1, ou seja, o conjunto de fórmulas $\psi(x_1)$, tais que $M_1 \models \psi(a)$; definimos $f(a_0) = b_{j_0}$;
- seja, agora, $j_1 = \min(\mathbb{N} \setminus \{j_0\})$ e seja $i_1 = \min\{i \in \mathbb{N} : a_i \text{ realiza } \mathrm{tp}^{M_2}(b_{j_0}, b_{j_1})\}$, e definimos $f(a_{i_1}) = b_{j_1}$;
- suponha que já tenhamos definido $f : \{a_0, a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\} \mapsto \{b_{j_0} \ldots, b_{j_k}\}$, para k ímpar; seja $i_{k+1} = \min(\mathbb{N} \setminus \{0, i_1, \ldots, i_k\})$ e seja $j_{k+1} = \min\{j \in \mathbb{N} : b_j \text{ realiza } \mathrm{tp}^{M_1}(a_0, a_{i_1}, \ldots, a_{i_{k+1}})\}$, e defina $f(a_{i_{k+1}}) = b_{j_{k+1}}$; seja $j_{k+2} = \min(\mathbb{N} \setminus \{j_0, j_1, \ldots, j_{k+1}\})$ e seja $i_{k+2} = \min\{i \in \mathbb{N} : a_i \text{ realiza } \mathrm{tp}^{M_1}(b_{j_0}, b_{j_1}, \ldots, b_{j_{k+2}})\}$, e defina $f(a_{i_{k+2}}) = b_{j_{k+2}}$.

Com isto construímos um isomorfismo $f : M_1 \to M_2$, provando que todos os modelos enumeráveis de T são isomorfos. □

6.6 Exercícios

Exercício 17 *Uma medida de complexidade de um termo t, $c'(t)$, pode ser definida por recursão, assim: se t é uma variável ou constante, $c'(t) = 1$ e se t é $f(s_{i_1}, \ldots, s_{i_n})$, então $c'(t) = 1 + \max\{c'(t_1), \ldots, c'(t_n)\}$. Mostre que $c(t)$ e $c'(t)$ são compatíveis, isto é, que $c(t_1) \leq c(t_2)$ se, e só se, $c'(t_1) \leq c'(t_2)$.*

(Portanto será usada no texto a medida mais conveniente conforme o caso, sem menção explícita.)

Exercício 18 *Outra medida de complexidade de um termo é contar o número de símbolos de constates, de variáveis e de funções usados em sua construção. Por recursão em construções de termos, definimos $c_s(t)$ para o termo t da seguinte forma:*

1. *se t for uma variável ou um símbolo de constante, então $c_s(t) = 1$;*

2. *se já foram definidos $c_s(t_1)$, ..., $c_s(t_n)$, e se $f \in F_n$ for síbolo de função n-ária, então definimos $c_s(f(t_1, \ldots, t_n)) = 1 + \sum_{i=1}^{n} c_s(t_i)$.*

Mostre que $c_s(t)$ conincide com a quantidade de símbolos de constantes, variáveis e funções presentes no termo t. Mostre que c e c_s são compatíveis (veja o exercício anterior).

Exercício 19 *O mesmo que o exercício anterior mas para fórmulas.*

Exercício 20 *Mostre que a relação $M \models \varphi[s]$ só depende das variáveis livres de φ, isto é, se $s'(y) = s(y)$, $y \in VL(\varphi)$, então $M \models \varphi[s']$.*

Exercício 21 *Mostre que se $\Phi : M \to N$ é morfismo, então se φ for atômica ou negação de atômica, então $M \models \varphi[s]$ se, e só se, $N \models \varphi[\Phi \circ s]$.*

Exercício 22 *Preencha os detalhes da demonstração de que a estrutura M é modelo de Γ_∞ no Teorema da Completude.*

Exercício 23 *Mostre que se Γ é consistente, então tem modelo, no caso em que a assinatura L seja não enumerável. [Sugestão: seja $\kappa > \omega$ o cardinal de L; seja $D = \{d_\alpha : \alpha < \kappa\}$ um conjunto de κ novas constantes; enumere as $L(D)$-sentenças por $\{\phi_\alpha : \alpha < \kappa\}$ e construa $\Gamma_0 = \Gamma$, $\Gamma_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \Gamma_\alpha$, se λ for ordinal limite, e $\Gamma_{\alpha+1}$ como no caso enumerável.]*

Exercício 24 *Para cada $n \geq 0$ e cada ϕ, com $VL(\phi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, sejam $U_\phi = \{\Gamma \in S_n(L) : \phi \in \Gamma$. Estes conjuntos formam uma base de uma topologia de $S_n(L)$ totalmente desconexa e compacta, ou seja, mostre que:*

1. *o conjunto de tais U_ϕ é fechado por uniões e interseções finitas e também por complementos; como o complemento de um aberto é fechado, tais conjuntos são, ao mesmo tempo, abertos e fechados;*

2. *os conjuntos abertos de $S_n(L)$ são as uniões arbitrárias desses conjuntos; a topologia de $S_n(L)$ é o conjunto τ de todos os conjuntos abertos;*

3. *essa topologia é Hausdorff, ou seja, dados $\Gamma_1, \Gamma_2 \in S_n(L)$ distintos, existem $U, V \in \tau$ disjuntos, tais que $\Gamma_1 \in U$ e $\Gamma_2 \in V$;*

4. *essa topologia é compacta, ou seja, se F_i, $i \in I$, for uma família de conjuntos fechados (complementos de abertos) em $S_n(L)$, tal que $\bigcap_{i\in I} F_i = \varnothing$, então existe $I_0 \subseteq I$ finito, tal que $\bigcap_{i\in I_0} F_i = \varnothing$.*

Exercício 25 *O objetivo deste exercício é provar esta versão mais geral do*

> ***Teorema da Omissão de Tipos:*** *Suponha que a assinatura L é finita ou (infinita) enumerável. Dado conjunto consistente de sentenças (não necessariamente maximal) T e dados $\Gamma_j \in S_{n_j}(T)$ tipos não isolados $j \in \mathbb{N}$, existe $M \models T$ que omite todos esses tipos.*

Para isto, resolva os itens a seguir. No que se segue, $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ e $D_n = \{a_{m,n} : m \in \mathbb{N}\}$, conjunto de novas constantes a serem juntadas à assinatura L, obtendo-se a assinatura $L(D) = L \cup D$ (com $D \cap L = \varnothing$). Uma ***enumeração de Henkin*** *(de $L(D)$-sentenças) é um conjunto maximal consistente de $L(D)$-sentenças X, tal que se $\phi \in X$ é uma $L(D_k)$-fórmula tendo x como única variável livre, então existe $a \in D_{k+1}$ tal que $\phi|_{x=a} \in X$. Seja $H(T)$ o conjunto de todas as enumerações de Henkin (contendo T), como descritas acima.*

1. *Mostre que $H(T)$ é subconjunto fechado e não vazio de $S_0^{L(D)}(T)$ (o conjunto de todas as $\Gamma \in S_0(L(D))$ maximais consistentes).*

2. ***(2,0 pontos)*** *Mostre que se $\Gamma \in S_n^L(T)$ é um tipo não isolado, então $F(\Gamma) = H(T) \cap \bigcap_{\phi\in\Gamma} U_\phi$ é um fechado de $H(T)$ de interior vazio (ou seja, não existe nenhuma $L(D)$-sentença ψ, tal que $U_\psi \subseteq F$).*

3. *Usando o fato de que todo espaço compacto tem a propriedade de Baire (ou seja, união enumerável de fechados com interior vazio tem interior vazio), mostre que dados tipos* $\Gamma_j \in S^L_{n_j}(T)$, $j \in \mathbb{N}$, *não isolados, então existe* $\Delta \in H(T) \setminus \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \bigcap_{\phi\in\Gamma_j} U_\phi$

4. *Mostre que o modelo obtido pelo método das constantes correspondente a* Δ *omite cada tipo* Γ_j, $j \in \mathbb{N}$.

Exercício 26 *Dado conjunto maximal consistente* T *de* L*-sentenças,* L *finita ou enumerável e seja* $S(T) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n(T)$ *(observe que* $S_0(T) = \{T\}$*).*

1. *Mostre que* $S(T)$ *é enumerável se, e só se, os tipos isolados de cada* $S_n(T)$ *são densos em* $S_n(T)$, $n \geq 1$, *ou seja, para cada* ϕ *existe um tipo isolado em* U_ϕ. *[Observe-se que, por serem espaços compactos, cada* $S_n(T)$ *só pode ter no máximo uma quantidade enumerável de tipos isolados. Mostre que se os tipos isolados não são densos em algum* $S_n(T)$*, então existem* $2^{\aleph_0}$ *tipos não isolados: para isto, construa uma árvore binária de abertos* U_ϕ*, indexando as* ϕ *com sequências binárias finitas, começando co uma* $\phi_\varnothing$*, tal que* $U_{\phi_\varnothing}$ *não contenha nenhum tipo isolado e mostre que existe* $\phi_{\langle 0\rangle}$ *tal que, se* $\phi_{\langle 1\rangle}$ *for a fórmula* $\neg\phi_{\langle 0\rangle}$*, então* $\varnothing \neq U_{\phi_{\langle 0\rangle}} \subset U_\varnothing$ *e* $\varnothing \neq U_{\phi_{\langle 1\rangle}} \subset U_\varnothing$*, etc.]*

2. *Mostre que se* $S(T)$ *é enumerável e* $M \models T$ *é modelos enumerável, então dado* $A \subseteq M$, $S^{L(A)}(T_{L(A)}(M))$ *também é enumerável, sendo que* $T_{L(A)}(M)$ *é a* $L(A)$*-teoria de* M*, ou seja, o conjunto de todas as* $L(A)$*-sentenças verdadeiras em* M.